Nedžad Pašalić *

UDK 528. 236
Pregledni rad

ODREĐIVANJE PARAMETARA ZA TRANSFORMACIJU KOORDINATA SA BESSELOVOG ELIPSOIDA NA ELIPSOID WGS-84

POSTAVKA PROBLEMA

Ovaj problem naročito je aktueliziran novim mogućnostima i potrebama GPS tehnike i njenim korišćenjem za određivanje položaja u prostoru stabilnih i pokretnih objekata (geodetskih mreža, aviona, brodova, vojnih trupa itd). Pošto se GPS tehnikom položaji objekata određuju u odnosu na elipsoid WGS-84, to se za ove potrebe koordinate tih objekata trebaju sa lokalnih elipsoida preračunati na taj novi - do sada najtačniji i najbolje orijentisani elipsoid. U daljem tekstu ćemo razmotriti razloge koji su doveli do toga da danas na jednoj strani imamo apsolutno orijentisani elipsoid WGS-84, a na drugoj strani veći broj relativno orijentisanih lokalnih elipsoida (među kojima je i Besselov elipsoid).

Normalno je pod oblikom i dimenzijama Zemlje smatrati izgled i dimenzije vidljive površine planete. Cilj ispitivanja tih osobina Zemlje i jest upravo određivanje vidljive površine. Ali se ona ne može ispitati, a posebno kartografisati bez ogromnog broja mjerenja i računanja odnosa među njima. Da bi se ti odnosi mogli uspostaviti mjerenja se moraju svesti na neku jednostavnu matematičku površinu.

Ovo svođenje je otežano činjenicom da Zemlja kao fizičko tijelo ne djeluje na vanjski prostor - pa i na mjerne instrumente - u skladu samo sa okolnim oblicima, nego je taj uticaj rezultat privlačenja svih čestica Zemlje, kojima se stvara polje potencijala zemljine teže. Njegovi vektori - silnice - opredjeljuju položaj tijela u tom polju (Na primjer, vertikalna osa teodolita se podudara sa silnicom u datoj tačci). Površine jednakog potencijala zovu se ekvipotencijalne površine. Ona od njih koja se podudara sa površinom mirnog okeana zove se geoid i smatra se fizičkim oblikom Zemlje. Kako visine računamo od površine okeana, onda ih i mjerenjem dobijamo u odnosu na geoid. Površina geoida je, međutim, toliko nepravilna da, strogo uzevši, mijenja svoje geometrijske i fizičke karakteristike (parametre) u svakoj tačci. Zbog toga na njoj ne bismo mogli uspostaviti nikakve matematičke odnose između koordinata, dužina, uglova, površina itd. U najboljem slučaju bi ti odnosi bili veoma složeni. Tako bi masovni geodetski radovi - premjer, kartografisanje, kao i izučavanje raznih fizičkih osobina Zemlje - bili nemogući ili jako otežani. Zbog toga se ispitivanje oblika i dimenzija Zemlje izvodi u tri koraka:

- prvo se nađe relativno jednostavno geometrijsko tijelo (na kojem se mogu uspostaviti odnosi između mjerenja i relativno lako iz njih sračunati potrebne veličine)- matematički model - koje se najbolje podudara sa geoidom;
- zatim se traže odstupanja geoida od modela; i na kraju
- odstupanja tla od geoida.

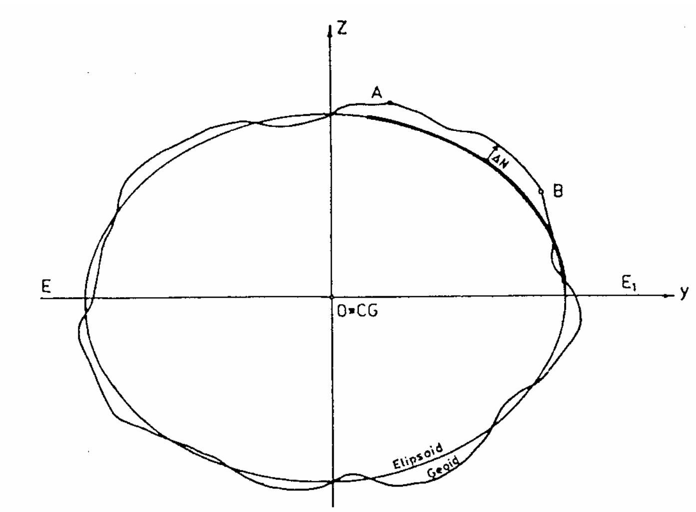
Dimenzije i oblik modela se u geodetskom smislu i smatraju dimenzijama i oblikom Zemlje. Sva mjerenja na površini Zemlje svode se na model, na kojem se onda

* Nedžad Pašalić, dipl.inž.geod., Angermeier Engineers d.o.o. Sarajevo
Konsultant: prof.dr Abdulah Muminagić, Građevinski fakultet Sarajevo

uspostavljaju odnosi između mjerenja i sa kojega se razvijaju u ravan projekcije potrebne predstave o Zemlji kao planeti, ili njenim dijelovima.

Na osnovu teorije o postanku Zemlje i zakona univerzalnog privlačenja (koji je sam otkrio) Njutn (Isac Newton 1642 - 1728) je matematički dokazao da se Zemlja najpribližnije može predstaviti sferoidom blago spljoštenim u pravcu polova. Od svih sferoida najjednostavniji je obrtni elipsoid. On je veoma blizak sferoidu koji bi se formirao u uslovima okretanja tečne homogene mase uglovnom brzinom kojom se okreće Zemlja. Maksimalno razdvajanje ovih tijela je približno dva metra.

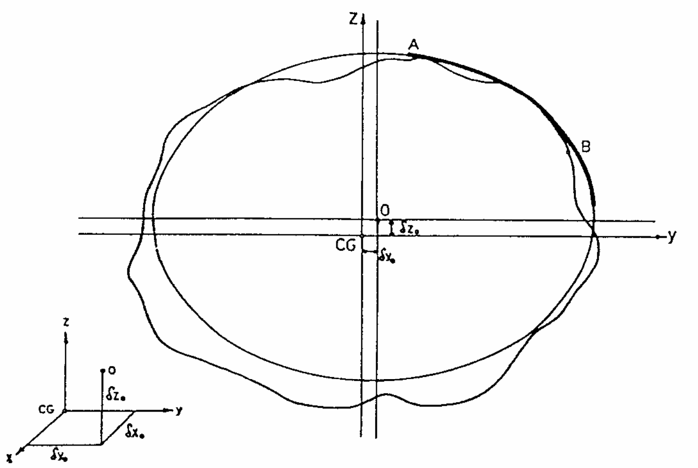
Ako su dimenzije, oblik i orijentacija ovog elipsoida u Zemljinom tijelu takvi da najbolje predstavljaju Zemlju kao planetu on se zove opšti zemaljski elipsoid. Njegov centar treba da se podudara sa centrom Zemljine mase, ekvatorska ravan sa ravni Zemljinog ekvatora, mala osa elipsoida sa obrtnom osom Zemlje, a suma visina geoida iznad i ispod elipsoida da je jednaka nuli. Takav elipsoid je u prostoru apsolutno orijentisan. Slika 1 predstavlja meridijanski presjek takve orijentacije.



Slika 1.

Međutim, visine geoida u odnosu na elipsoid su se veoma teško određivale. Zbog toga su mnoge države za obradu svojih mreža i premjera usvajale elipsoide koji se po obliku, dimenzijama i orijentaciji najbolje i podudaraju sa površinom geoida na njihovom teritoriju. Ovakvi elipsoidi se zovu najprikladnijim. Mala osa ovakvih elipsoida je paralelna srednjem položaju obrtne ose za određenu epohu, a njegov centar je pomjeren u odnosu na centar gravitacije Zemlje tako da se površina elipsoida maksimalno podudara sa površinom geoida na cijelom području države.

U tom se slučaju smatra da se ove dvije površine podudaraju, pa se visine izmjerene u odnosu na geoid smatraju kao da su izmjerene u odnosu na elipsoid i redukcije mjerenja na geoid - kao redukcije na elipsoid. Tako se izbjegavao težak zadatak određivanja razmaka površina geoida i elipsoida. Na slici 2 je nacrtan meridijanski presjek, pa je centar elipsoida pomaknut u odnosu na centar gravitacije samo po koordinatama y i z. U suštini, elipsoid se pomjera po sve tri ose za δx_o,δy_o i δz_o respektivno.



Slika 2.

Elipsoid na koji se svode geodetska mjerenja i na kojem se ona obrađuju zove se referenc-elipsoid. Prema tome i opšti elipsoid može biti referentni ako se na njega svedu i na njemu obrađuju geodetska mjerenja.

Opšti Zemljin elipsoid do sada nije korišćen kao referentni uglavnom zbog toga što se nije mogao odrediti centar inercije Zemlje, pa se, prema tome, elipsoid nije mogao na odgovarajući način orijentisati. Pored toga, nisu postojala sredstva ni mjerni materijal za sračunavanje razlike potencijala geoida i opšteg elipsoida bar u jednoj tačci. Zbog toga se nisu mogli računati razmaci ovih dviju površina, a, kao posljedica toga, ni redukcije mjerenja na elipsoid.

To je razlog što je svaka država ili grupa država utvrđivala svoj referenc - elipsoid, koji je bio najprikladniji za njihovo područje kako po dimenzijama, tako i po orijentaciji. Prema tome, dimenzije najprikladnijeg elipsoida mogu biti jednake sa dimenzijama opšteg.

Posljedica ovog odstupanja je diskontinuitet - nepovezanost geodetskih mreža i karata raznih država. Otuda i njihova neupotrebljivost za rješavanje osnovnog zadatka geodezije- određivanje geometrijskih i fizičkih parametara Zemlje.

Ekonomsko-političke i vojne integracije država, nastale nakon Drugog svjetskog rata, objedinile su unutar svog područja geodetske radove i prenijele ih (svele) svaka na svoj posebno izabran i orijentisan elipsoid. To su diktirali ekonomski, a još više vojni razlozi.

Savremena tehnika, posebno satelitska, i moćni elektronski računari omogućili su, uz neslućeno povećanje tačnosti, manipulativnosti i ekonomičnosti instrumenata za mjerenje dužina, uglova i ubrzanja sile Zemljine teže, i veoma tačno određivanje centra inercije Zemlje, položaja njene obrtne ose, kao i dimenzija i oblika. Tako se mogao orijentisati opšti zemaljski elipsoid i razviti jedinstvena svjetska triangulacija. Osim toga se, relativno brzo, dobija ogroman broj mjerenja visoke tačnosti, koje moćni računari obrađuju na željeni način. Zahvaljujući njihovom svakodnevnom umnožavanju, sračunavaju se sve tačniji parametri oblika, dimenzija i polja sile Zemljine teže. Nakon njihovog upoređenja i analize Međunarodna geodetska asocijacija (MGA) periodički ih usvaja i preporučuje kao referentne za dalja naučna istraživanja.

Karakterističan primjer ovakve orijentacije je elipsoid WGS-84. World Geodetic System 1984 (WGS-84)razvijen je u SAD. Razvoj WGS-84 bio je potaknut u svrhu pružanja preciznijih geodetskih gravimetrijskih podataka sistemima navigacije i naoružanja američkog Ministarstva odbrane. Novi sistem prikazuje određivanje oblika i dimenzija Zemlje sa geometrijskih, geodetskih i gravimetrijskih stajališta koristeći podatke, tehnike i tehnologiju kojom je raspolagala Defense Maping Agency početkom 1984.

Koordinatni sistem WGS-84 je konvencionalan sistem dobiven modificiranjem sistema nazvanog Navygation Satelite System Doppler Reference Frame (NSWC9Z-2) u ishodištu i mjerilu, te rotaciji koja njegov referentni meridijan dovodi do poklapanja sa nul-meridijanom Bureau International de L'Heure (BIH)[1].

Ishodište koordinatnog sistema WGS-84 nalazi se u središtu Zemljine mase; Z-os sistema WGS-84 paralelna je smjeru Conventional Terestrial Pole (CTP)[2] za kretanje mase, kako je definirao BIH, X-os je presjek WGS-84 ravnine referentnog meridijana i ravnine CTP ekvatora, referentni meridijan je paralelan nul meridijanu definiranom od BIH-a; Y-os upotpunjuje nadesno orijentirani ortogonalni sistem čvrsto vezan za Zemlju.

Ishodište i osi koordinatnog sistema WGS-84 služe također kao geometrijsko središte i X,Y i Z osi elipsoida WGS-84. Z-os koordinatnog sistema WGS-84 je os rotacije elipsoida WGS-84.

Velika poluosa elipsoida WGS-84 iznosi a= 6 378 137m.

Vrijednost velike poluosi elipsoida temelji se na procjeni iz rezultata dobivenih u razdoblju 1976-1979. iz laserskih, Dopplerskih, radarsko-altimetrijskih, kombinovanih mjerenja,opažanja dalekih kosmičkih aparata,laserske lokacije Mjeseca itd.

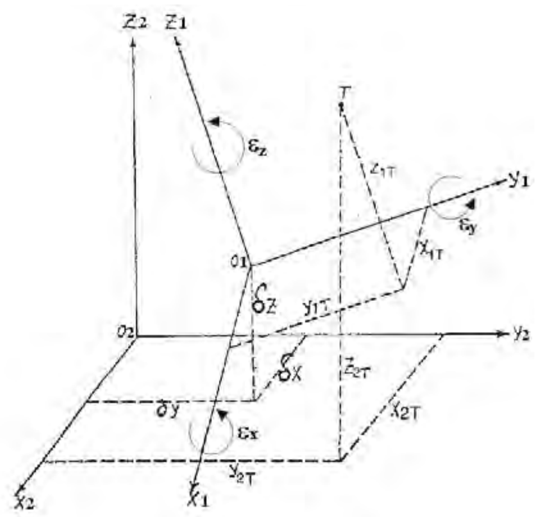
IZVOĐENJE OSNOVNIH JEDNAČINA

Ovaj problem se postavlja na primjer, kada se koordinate jedne triangulacije, sračunate u svom sistemu, transformišu u sistem druge triangulacije (radi objedinjavanja u naučne ili kartografske svrhe). Da bismo izvršili transformaciju koordinata sa Besselovog elipsoida na elipsoid WGS-84 (tzv. trodimenzionalnu transformaciju) neophodno je poznavanje sedam parametara trodimenzionalne transformacije. Za određivanje tih parametara potrebno je imati određeni broj zajedničkih tačaka, tj. tačaka čije su koordinate poznate u oba koordinatna sistema. Neophodno je imati tri zajedničke tačke, međutim obično se problem rješava pomoću većeg broja zajedničkih tačaka ravnomjerno raspoređenih po teritoriji za koju određujemo parametre transformacije.

Veza između ova dva sistema najbolje je vidljiva na slici 3. gdje se jasno vidi, da se koordinatni počeci prvog i drugog sistema ne podudaraju, a prvi sistem je zaokrenut oko ose Z_1 za ugao ε_z, oko ose Y_1 - za ε_y i oko X_1 - za ε_x i općenito nema istu razmjeru kao prvi sistem, faktor razmjere je ε_s. Transformaciju koordinata tačke T iz prvog (Besselovog) u drugi (WGS-84) sistem izvršićemo na taj način što ćemo, prvo prenijeti njegov KP u KP drugog sistema, a zatim rotacijom prvo oko ose Z_1 za ugao ε_z, oko ose Y_1

1) Međunarodni biro za vrijeme.
2) Dogovoreni zemaljski pol.

- za ε_y i oko X_1- za ε_x dovesti ose oba sistema do poklapanja i - na kraju - pomnožiti tako transformisane koordinate sa faktorom razmjere ε_s.



Slika 3.

Prijenos koordinatnog početka se ostvaruje linijskom translacijom. Rotacija oko koordinatnih osa izvodi se pomoću sljedećih formula, datih u matričnom obliku:

$$Ex = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & \sin\varepsilon_x \\ 0 & -\sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{matrix} \right\| \qquad Ey = \left\| \begin{matrix} \cos\varepsilon_y & 0 & \sin\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{matrix} \right\|$$

$$Ez = \left\| \begin{matrix} \cos\varepsilon_Z & \sin\varepsilon_Z & 0 \\ -\sin\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

Cijela transformacija će se izvršiti po formuli:

$$\left\|\begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{matrix}\right\| + (1+\varepsilon_S)\cdot Ex \cdot Ey \cdot Ez \cdot \left\|\begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix}\right\| \qquad (2)$$

Pošto se kod razvijanja obje triangulacije nastojalo osigurati što bolji koordinatni sistem normalno da su uglovi ε_X,ε_Y i ε_Z mali - reda sekunda. Zbog toga su im kosinusi jedinice, a sinusi sami uglovi u radijanima. Stoga predhodnu jednačinu možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\left\|\begin{matrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{matrix}\right\| + (1+\varepsilon_S)\cdot \left\|\begin{matrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{matrix}\right\| \qquad (3)$$

Ovom jednačinom je dat konačni oblik veze između ova dva koordinatna sistema.

IZVOĐENJE JEDNAČINA GREŠAKA ZA ODREĐIVANJE PARAMETARA TRODIMENZIONALNE TRANSFORMACIJE

Veza između koordinatnog sistema Besselovog elipsoida i elipsoida WGS - 84 se može napisati kao:

$$\left\|\begin{matrix} X_W \\ Y_W \\ Z_W \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \delta_Z \end{matrix}\right\| + (1+\varepsilon_s)\cdot \left\|\begin{matrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_Y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{matrix}\right\|$$

Ako su koordinate tačke T poznate u oba koordinatna sistema, onda je veza između njih (u razvijenom obliku) data sljedećim sistemom jednačina:

$$\begin{aligned} \mathbf{X_{W_T}} &= \delta x + 0 + 0 + \mathbf{X_{B_T}}\,\varepsilon_S + 0 - \mathbf{Z_{B_T}}\,\varepsilon_y + \mathbf{Y_{B_T}}\,\varepsilon_z \\ \mathbf{Y_{W_T}} &= 0 + \delta y + 0 + \mathbf{Y_{B_T}}\,\varepsilon_S + \mathbf{Z_{B_T}}\,\varepsilon_x + 0 - \mathbf{X_{B_T}}\,\varepsilon_z \\ \mathbf{Z_{W_T}} &= 0 + 0 + \delta z + \mathbf{Z_{B_T}}\,\varepsilon_S - \mathbf{Y_{B_T}}\,\varepsilon_x + \mathbf{X_{B_T}}\,\varepsilon_y + 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Ovaj sistem jednačina važi i za bilo koju drugu zajedničku tačku. Odakle slijedi da ako imamo n- zajedničkih tačaka, veza između njih se može napisati ovako:

$$
\begin{array}{lllllllll}
X_{W_1} = & \delta x & + 0 & + 0 & + X_{B_1}\varepsilon_s & + 0 & - Z_{B_1}\varepsilon_y & + Y_{B_1}\varepsilon_z \\
Y_{W_1} = & 0 & + \delta y & + 0 & + Y_{B_1}\varepsilon_s & + Z_{B_1}\varepsilon_x & + 0 & - X_{B_1}\varepsilon_z \\
Z_{W_1} = & 0 & + 0 & + \delta z & + Z_{B_1}\varepsilon_s & - Y_{B_1}\varepsilon_x & + X_{B_1}\varepsilon_y & + 0 \\
X_{W_2} = & \delta x & + 0 & + 0 & + X_{B_2}\varepsilon_s & + 0 & - Z_{B_2}\varepsilon_y & + Y_{B_2}\varepsilon_z \\
Y_{W_2} = & 0 & + \delta y & + 0 & + Y_{B_2}\varepsilon_s & + Z_{B_2}\varepsilon_x & + 0 & - X_{B_2}\varepsilon_z \\
Z_{W_2} = & 0 & + 0 & + \delta z & + Z_{B_2}\varepsilon_s & - Y_{B_2}\varepsilon_x & + X_{B_2}\varepsilon_y & + 0 \\
 & . & . & . & . & . & . & . \\
 & . & . & . & . & . & . & . \\
 & . & . & . & . & . & . & . \\
X_{Wn} = & \delta x & + 0 & + 0 & + X_{Bn}\varepsilon_s & + 0 & - Z_{Bn}\varepsilon_y & + Y_{Bn}\varepsilon_z \\
Y_{Wn} = & 0 & + \delta y & + 0 & + Y_{Bn}\varepsilon_s & + Z_{Bn}\varepsilon_x & + 0 & - X_{Bn}\varepsilon_z \\
Z_{Wn} = & 0 & + 0 & + \delta z & + Z_{Bn}\varepsilon_s & - Y_{Bn}\varepsilon_x & + X_{Bn}\varepsilon_y & + 0
\end{array}
\qquad (5)
$$

Zadatak se rješava metodem posrednog izravnanja, te će se u tu svrhu koordinate tačaka na elipsoidu WGS-84 smatrati mjerenim veličinama koje poslije izravnanja trebaju dobiti odgovarajuće popravke. Posljednji sistem jednačina onda se može napisati tako da su mjerene veličine (koordinate tačaka na elipsoidu WGS-84) funkcije traženih veličina (δx, δy, δz, ε_s, ε_x, ε_y, ε_z):

$$
\begin{array}{l}
X_{W_1} + v_{x_1} = \Psi_{x_1}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Y_{W_1} + v_{y_1} = \Psi_{y_1}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Z_{W_1} + v_{z_1} = \Psi_{z_1}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
X_{W_2} + v_{x_2} = \Psi_{x_2}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Y_{W_2} + v_{y_2} = \Psi_{y_2}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Z_{W_2} + v_{z_2} = \Psi_{z_2}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
X_{Wn} + v_{xn} = \Psi_{xn}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Y_{Wn} + v_{yn} = \Psi_{yn}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z) \\
Z_{Wn} + v_{zn} = \Psi_{zn}(\delta x,\delta y,\delta z,\varepsilon_s,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z)
\end{array}
\qquad (6)
$$

Ako su poznate ili su na neki način određene približne vrijednosti traženih veličina, onda se funkcije Ψ_{xi},Ψ_{yi} i Ψ_{zi} gdje $i\in(1,2,3,...,n)$ mogu razviti u Tejlorov red u okolini približnog rješenja ($\delta x^o,\delta y^o,\delta z^o,\varepsilon_s^o,\varepsilon_x^o,\varepsilon_y^o,\varepsilon_z^o$). Ako se zatim nađu parcijalni izvodi funkcija po odgovarajućim traženim veličinama, i njihove vrijednosti uvrste u predhodni sistem jednačina, dobijaju se jednačine grešaka:

$$
\begin{array}{l}
v_{x_1} = \Delta x + 0 + 0 + X_{B_1}\,\Delta\varepsilon_S + 0 - Z_{B_1}\,\Delta\varepsilon_y + Y_{B_1}\,\Delta\varepsilon + f_{x_1} \\
v_{y_1} = 0 + \Delta y + 0 + Y_{B_1}\,\Delta\varepsilon_S + Z_{B_1}\,\Delta\varepsilon_x + 0 - X_{B_1}\,\Delta\varepsilon_z + f_{y_1} \\
v_{z_1} = 0 + 0 + \Delta z + Z_{B_1}\,\Delta\varepsilon_S - Y_{B_1}\,\Delta\varepsilon_x + X_{B_1}\,\Delta\varepsilon_y + 0 + f_{z_1} \\
v_{x_2} = \Delta x + 0 + 0 + X_{B_2}\,\Delta\varepsilon_S + 0 - Z_{B_2}\,\Delta\varepsilon_y + Y_{B_2}\,\Delta\varepsilon_x + f_{x_2} \\
v_{y_2} = 0 + \Delta y + 0 + Y_{B_2}\,\Delta\varepsilon_S + Z_{B_2}\,\Delta\varepsilon_x + 0 - X_{B_2}\,\Delta\varepsilon_z + f_{y_2} \\
v_{z_2} = 0 + 0 + \Delta z + Z_{B_2}\,\Delta\varepsilon_S - Y_{B_2}\,\Delta\varepsilon_x + X_{B_2}\,\Delta\varepsilon_y + 0 + f_{z_2} \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
v_{xn} = \Delta x + 0 + 0 + X_{Bn}\,\Delta\varepsilon_S + 0 - Z_{Bn}\,\Delta\varepsilon_y + Y_{Bn}\,\Delta\varepsilon_z + f_{xn} \\
v_{yn} = 0 + \Delta y + 0 + Y_{Bn}\,\Delta\varepsilon_S + Z_{Bn}\,\Delta\varepsilon_x + 0 - Y_{Bn}\,\Delta\varepsilon_z + f_{yn} \\
v_{zn} = 0 + 0 + \Delta z + Z_{Bn}\,\Delta\varepsilon_S - Y_{Bn}\,\Delta\varepsilon_x + X_{Bn}\,\Delta\varepsilon_y + 0 + f_{zn}
\end{array}
\tag{7}
$$

f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} su slobodni članovi koje računamo po sljedećim jednačinama:

$$
\begin{array}{l}
f_{xi} = \Psi_{xi}(\delta x^0,\delta y^0,\delta z^0,\varepsilon_S{}^0,\varepsilon_x{}^0,\varepsilon_y{}^0,\varepsilon_z{}^0) - X_{Wi} \\
f_{yi} = \Psi_{yi}(\delta x^0,\delta y^0,\delta z^0,\varepsilon_S{}^0,\varepsilon_x{}^0,\varepsilon_y{}^0,\varepsilon_z{}^0) - Y_{Wi} \\
f_{zi} = \Psi_{zi}(\delta x^0,\delta y^0,\delta z^0,\varepsilon_S{}^0,\varepsilon_x{}^0,\varepsilon_y{}^0,\varepsilon_z{}^0) - Z_{Wi}
\end{array}
\tag{8}
$$

Jednačine grešaka u matričnom obliku možemo napisati kao:

$$
\begin{Vmatrix} V_{X1} \\ V_{Y1} \\ V_{Z1} \\ \cdots \\ V_{Xn} \\ V_{Yn} \\ V_{Zn} \end{Vmatrix}
=
\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\
0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\
0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 0 & 0 & X_n & 0 & -Z_n & Y_n \\
0 & 1 & 0 & Y_n & Z_n & 0 & -X_n \\
0 & 0 & 1 & Z_n & -Y_n & X_n & 0
\end{Vmatrix}
\cdot
\begin{Vmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \\ \Delta\varepsilon_S \\ \Delta\varepsilon_X \\ \Delta\varepsilon_Y \\ \Delta\varepsilon_Z \end{Vmatrix}
+
\begin{Vmatrix} f_{X1} \\ f_{Y1} \\ f_{Z1} \\ \cdots \\ f_{Xn} \\ f_{Yn} \\ f_{Zn} \end{Vmatrix}
\tag{9}
$$

ili kraće: V = AX + F, gdje je:

$$
A = \begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\
0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\
0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 0 & 0 & X_n & 0 & -Z_n & Y_n \\
0 & 1 & 0 & Y_n & Z_n & 0 & -X_n \\
0 & 0 & 1 & Z_n & -Y_n & X_n & 0
\end{Vmatrix}
\quad
X = \begin{Vmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \Delta_Z \\ \Delta\varepsilon_S \\ \Delta\varepsilon_X \\ \Delta\varepsilon_Y \\ \Delta\varepsilon_Z \end{Vmatrix}
\quad
V = \begin{Vmatrix} V_{X1} \\ V_{Y1} \\ V_{Z1} \\ \cdots \\ V_{Xn} \\ V_{Yn} \\ V_{Zn} \end{Vmatrix}
\quad
F = \begin{Vmatrix} f_{X1} \\ f_{Y1} \\ f_{Z1} \\ \cdots \\ f_{Xn} \\ f_{Yn} \\ f_{Zn} \end{Vmatrix}
\tag{10}
$$

A - je matrica koeficijenata.
X - vektor priraštaja traženih veličina,
V - vektor popravki,
F - vektor slobodnih članova.

Dalje slijedi formiranje normalnih jednačina po formuli:

$$N\,X + H = 0 \qquad (11)$$

gdje je:

$$N=A^{*}A \quad i \quad H=A^{*}F. \qquad (12)$$

A zatim i njihovo rješenje po formuli:

$$X = -N^{-1}\,H. \qquad (13)$$

Treba napomenuti da su u vektoru priraštaja traženih veličina (X) dobijene vrijednosti parametara transformacije za rotaciju oko koordinatnih osa X,Y, i Z (ε_X, ε_Y i ε_Z) u radijanima, te da bi njihove vrijednosti dobili u sekundama treba ih pomnožiti sa ro u sekundama (ρ'').

Na kraju, izravnate vrijednosti parametara transformacije dobijamo sabiranjem približnih vrijednosti parametara transformacije sa odgovarajućim vrijednostima dobijenim u vektoru priraštaja parametara transformacije (vektoru priraštaja traženih veličina).

$$X' = X_0 + X \qquad (14)$$

Koristeći predhodne jednačina odredio sam parametre za transformaciju koordinata sa Besselovog elipsoida na elipsoid WGS-84, uzevši u obzir šest zajedničkih tačaka približno ravnomjerno raspoređenih po teritoriji BiH. Nakon izravnanja dobio sam sljedeće vrijednosti parametara transformacije.

δx = **554,180 m**
δy = **173,513 m**
δz = **472,624 m**
ε_S = **-0,000 005 985**
ε_X = **-5'',9599**
ε_y = **-1'',8975**
ε_Z = **11'',8969**

Primjedba:

Ovo rješenje ukazuje na put kojim bi trebalo ići pri obradi ovakvih problema.Veći broj korištenih tačaka vjerovatno bi dao nešto drugačije rezultate (ali ne bitno) posebno ako bi one bile raspoređene na većoj površini. To je svakoko zadatak institucija koje se bave tom problematikom.

Sažetak

U radu je obrađen problem određivanja parametara za transformaciju koordinata sa Besselovog elipsoida na elipsoid WGS-84. Na samom početku rada navedeni su razlozi koji su doveli do ovoga problema kao i razlozi zbog kojih je potrebno riješiti isti.

Parameters determination for transformation of coordinates from Bessel's ellipsoid to WGS 84 ellipsoid.

Abstract

Paper deals (my work deals) with the problems of parameters determination for transformation of coordinates from Bessel's ellipsoid to WGS 84 ellipsoid.
At the beginning of my work I mentioned the reasons of this problem as well as the reasons for which there is a necessity to solve the same one.

Literatura

1. Muminagić A.: Viša geodezija I - Građevinski fakultet u Sarajevu, 1981.

2. Muminagić A.: Viša geodezija II - Naučna knjiga, Beograd,1987.

3. Pašalić N.: Diplomski rad na temu "Određivanje parametara za transformaciju koordinata sa Besselovog elipsoida na elipsoid WGS-84", 1999.g.

4. Pašalić S.: Račun izravnanja - Građevinski fakultet u Sarajevu, 1989.

5. Peterca M. i ostali: Kartografija – Vojnogeografski Institut, Beograd, 1974.