Esad Vrce[1] - Sarajevo

UDK 528.08
Originalni naučni rad

Kvalitet geodetske mreže

1 Uvod

Standardna odstupanja rezultata izravnanja su brojevni pokazatelji koji pružaju informaciju o tačnosti mreže, a samim tim i o kvalitetu geodetske mreže. Međutim kvalitet geodetske mreže je širi pojam od tačnosti mreže. Kvalitet geodetske mreže određuje se na osnovu teorije tačnosti i teorije pouzdanosti (Mihailović, Aleksić, 1994). Tačnost omogućava da se izvrši objektivna ocjena dobivenih rezultata i ona će biti realna ako su ostvarene pretpostavke o stohastičkom modelu. Potpunu informaciju o tačnosti geodetske mreže pruža kovarijacijska matrica. Pouzdanost geodetske mreže ukazuje na mogućnost otkrivanja grubih grešaka ili na utvrđivanje njihovog utjecaja na tražene veličine, ukoliko nisu otkrivene grube greške. Teorija pouzdanosti odnosi se na unutrašnju i vanjsku pouzdanost.

Unutrašnja pouzdanost je moć, sposobnost kontrole rezultata mjerenja u procesu izravnanja. Ovo je veoma složen problem, jer popravke $\mathbf{v}$ sadrže greške svih mjerenih veličina koje su učestvovale u izravnanju. Jednostavno je utvrditi koje popravke v ne zadovoljavaju željenu tačnost, ali je veoma teško, a u nekim slučajevima nemoguće, utvrditi mjerenu veličinu čija je gruba greška izazvala veliku vrijednost popravke. Vanjska pouzdanost se bavi utjecajem neotkrivenih grubih grešaka na konačne rezultate dobivene iz izravnanja. Postoje lokalni i globalni kriterij. Lokalni kriterij služi za otkrivanje grubih grešaka u pojedinim mjerenjima, a globalni za utvrđivanje utjecaja grubih grešaka na cijelu mrežu ili na njene pojedine dijelove.

2 Ocjena tačnosti geodetske mreže

Ocjena tačnosti geodetske mreže može se izraziti pomoću lokalnih mjera tačnosti, globalnih mjera tačnosti i usporedbom s drugom kovarijacijskom matricom npr. kriterijskom matricom (Ivković, Barković, 1992). Pomoću lokalnih mjera tačnosti izražava se tačnost položaja svake pojedine tačke u mreži. Razmatra li se tačnost geodetske mreže u cjelini, onda se ona izražava pomoću globalnih mjera tačnosti.

Tačnost geodetske mreže može se mijenjati pomoću tri veličine:

- varijance jedinične težine $\hat{\sigma}_0^2$,
- konfiguracijske matrice $\mathbf{A}$,
- matrice težina $\mathbf{P}$.

2.1 Tačnost koordinata geodetske mreže

Sve informacije o tačnosti geodetske mreže daje kovarijacijska matrica $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ procijenjenih parametara $\hat{\mathbf{x}}$. Tačnost koordinata tačaka mreže zavisi od oblika mreže i tačnosti mjerenih veličina. Na tačnost mjerenja može se utjecati izborom odgovarajućeg pribora i

[1] Mr. sc. Esad Vrce, Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet, Odsjek za geodeziju, Patriotske lige 30, 71000 Sarajevo

instrumentarija, metodom rada te ostalim uvjetima (dobri meteorološki uvjeti, iskusan stručnjak i sl.). Oblik klasičnih terestričkih mreža ipak zavisi od terenskih prilika te veličine objekta za koji se mreža projektira.

Ako se kofaktorska matrica kod nezavisnih mjerenja označi sa $\mathbf{Q_l} = \mathbf{P}^{-1}$, koordinate nepoznatih tačaka izračunat će se u postupku izravnanja iz izraza:

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{Pf} \tag{2-1}$$

gdje je:

$\mathbf{A}$ - konfiguracijska matrica,

$\mathbf{f}$ - vektor slobodnih članova,

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ - kofaktorska matrica nepoznatih veličina.

Kovarijacijska matrica nepoznatih koordinata dobiva se u postupku izravnanja posrednom metodom iz izraza:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \left(\mathbf{A}^T\mathbf{PA}\right)^{-1} \tag{2-2}$$

Već i za male mreže kovarijacijska matrica $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ sadrži mnogo brojeva različitih veličina i predznaka, iz kojih je teško bilo šta zaključiti o tačnosti razmatrane mreže. Iz linearne algebre je poznato da se kvadratna matrica može dekomponirati na svojstvene vrijednosti λ_i i svojstvene vektore $\mathbf{x}_i$, koji se mogu naći i za kovarijacijsku matricu $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Zatim se iz svojstvenih vrijednosti λ_i mogu računati veličine koje mogu poslužiti za ocjenu tačnosti nepoznatih veličina.

2.2 Lokalne mjere tačnosti geodetske mreže

Razmatra li se tačnost položaja pojedine tačke u mreži, onda se za dvodimenzionalnu mrežu može izraziti pomoću: standardnih odstupanja, elipsi grešaka, kao i pomoću grešaka tačaka po Helmertu i grešaka tačaka po Werkmeisteru.

Kofaktorska matrica nepoznatih veličina $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, dobivena iz izravnanja (Caspary, 1987):

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} & \cdot & \mathbf{Q}_{1i} & \cdot & \mathbf{Q}_{1j} & \cdot & \mathbf{Q}_{1p} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} & \cdot & \mathbf{Q}_{2i} & \cdot & \mathbf{Q}_{2j} & \cdot & \mathbf{Q}_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Q}_{i1} & \mathbf{Q}_{i2} & \cdot & \mathbf{Q}_{ii} & \cdot & \mathbf{Q}_{ij} & \cdot & \mathbf{Q}_{ip} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Q}_{j1} & \mathbf{Q}_{j2} & \cdot & \mathbf{Q}_{ji} & \cdot & \mathbf{Q}_{jj} & \cdot & \mathbf{Q}_{jp} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{Q}_{p1} & \mathbf{Q}_{p2} & \cdot & \mathbf{Q}_{pi} & \cdot & \mathbf{Q}_{pj} & \cdot & \mathbf{Q}_{pp} \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

može se podijeliti, kod dvodimenzionalnih mreža, u 2x2 blok matrice, koje se odnose na koordinate pojedine tačke:

$$\mathbf{Q}_{kk} = \begin{bmatrix} q_{xx}{}^{k} & q_{xy}{}^{k} \\ q_{yx}{}^{k} & q_{yy}{}^{k} \end{bmatrix} \; ili \; \mathbf{Q}_{kl} = \begin{bmatrix} q_{xx}{}^{kl} & q_{xy}{}^{kl} \\ q_{yx}{}^{kl} & q_{yy}{}^{kl} \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

Iz tih blok matrica računaju se standardna odstupanja koordinata tačaka po formuli[2]:

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{xx}} \qquad \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{yy}} \tag{2-5}$$

U mnogim zadacima u praksi, potrebno je znati standardno odstupanje položaja tačke u proizvoljnom smjeru. Kako elementi na glavnoj dijagonali kovarijacijske matrice predstavljaju standardno odstupanje položaja tačke u smjeru koordinatnih osa, potrebno je naći u kojem smjeru je greška tačke maksimalna, a u kojem minimalna. Problem se svodi na traženje svojstvenih vrijednosti matrice kofaktora nepoznatih. Te svojstvene vrijednosti matrice kofaktora nepoznatih određuju se iz karakteristične jednačine:

$$\det \begin{vmatrix} q_{xx}{}^{k} - \lambda & q_{xy}{}^{k} \\ q_{xy}{}^{k} & q_{yy}{}^{k} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2-6}$$

ili u razvijenom obliku:

$$\lambda^2 - \left(q_{xx}{}^{k} + q_{yy}{}^{k}\right)\lambda + q_{xx}{}^{k} q_{yy}{}^{k} - q_{xy}{}^{k} q_{yx}{}^{k} = 0 \tag{2-7}$$

Rješenja karakteristične jednačine su:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{q_{xx}{}^{k} + q_{yy}{}^{k} + z}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{q_{xx}{}^{k} + q_{yy}{}^{k} - z}{2} \end{aligned} \tag{2-8}$$

gdje je:

$$z^2 = \left(q_{xx}{}^{k} - q_{yy}{}^{k}\right)^2 + 4 q_{xy}{}^{k} q_{yx}{}^{k} \tag{2-9}$$

Nakon izračunavanja svojstvenih vrijednosti λ_1 i λ_2 mogu se izračunati elementi elipse grešaka. Ti elementi su (slika 2.1):

• velika poluosa elipse:

$$A = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_1} \tag{2-10}$$

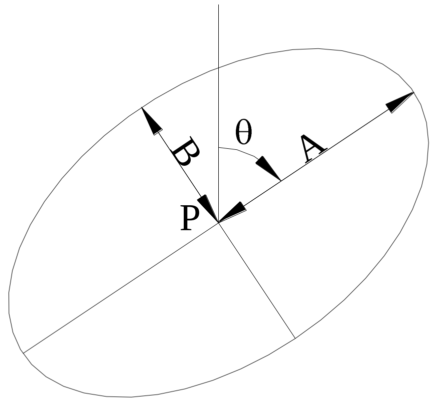
• mala poluosa elipse:

$$B = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_2} \tag{2-11}$$

[2] U praksi se često nazivaju i srednjim greškama koordinata.

• direkcioni ugao velike poluose elipse:

$$tg2\theta = \frac{2q_{xy}^{\;k}}{q_{xx}^{\;k} - q_{yy}^{\;k}} \tag{2-12}$$



Slika 2.1 Elementi elipse grešaka

Gore opisana elipsa grešaka je standardna elipsa grešaka. Ako se želi elipsa grešaka sa drugom vjerovatnoćom, onda se takvi elementi elipse grešaka mogu dobiti po sljedećoj formuli:

• velika poluosa elipse:

$$A = \hat{\sigma}_0\sqrt{2\lambda_1 F_{1-\alpha,2,n-r}} \tag{2-13}$$

• mala poluosa elipse:

$$B = \hat{\sigma}_0\sqrt{2\lambda_2 F_{1-\alpha,2,n-r}} \tag{2-14}$$

gdje su $F_{1-\alpha,2,n-r}$ vrijednosti F razdiobe s vjerovatnoćom α, 2 i $n-r$ stepeni slobode. Vjerovatnoća da će se tačka naći unutar standardne elipse grešaka je 0.39 za $n-r=\infty$. Ponekad se elipse grešaka aproksimiraju kružnim greškama. Najčešće se upotrebljavaju sljedeće kružne greške:

• standardna kružna greška tačke, vjerovatnoća 0.39:

$$\hat{\sigma}_P = \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y}{2} \tag{2-15}$$

• vjerovatna kružna greška tačke, vjerovatnoća 0.50:

$$\hat{\sigma}_P = 0.59(\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y) \tag{2-16}$$

• srednja kvadratna greška, odnosno greška po Helmertu:

$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2} \tag{2-17}$$

• greška tačke po Werkmeisteru:

$$\hat{\sigma}_P = \frac{AB}{\hat{\sigma}_0} = \hat{\sigma}_0\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \hat{\sigma}_0\sqrt{\det \mathbf{Q}_{kk}} \tag{2-18}$$

Greške tačaka po Werkmeisterovoj definiciji predstavlja površinu elipse grešaka. Kriterij tačnosti položaja tačke postavljen na ovaj način ima nedostatak, jer se može dogoditi da tačka s jednom vrlo velikom poluosom a drugom vrlo malom poluosom bude proglašena dobro određenom (jer ima malu površinu elipse grešaka).
Sljedeći kriterij za ocjenu tačnosti koordinata tačke može biti minimalna vrijednost velike poluose:

$$\lambda_1 \Rightarrow \min \tag{2-19}$$

U ovom slučaju nema se uvida u vrijednost druge poluose, što je također važno znati.
Tačnost položaja tačke može biti izražena pomoću odnosa između glavnih poluosa elipse grešaka, odnosno pomoću količnika svojstvenih vrijednosti:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow 1 \tag{2-20}$$

Zadovoljenje ovoga kriterija znači da elipse grešaka prelaze u kružnice.
Apsolutne elipse grešaka imaju jedan nedostatak. Naime, apsolutne elipse grešaka zanemaruju odnos među tačkama. Ovaj problem se može djelomično riješiti upotrebom relativnih elipsi grešaka koje prikazuju relativnu tačnost para tačaka, najčešće su to susjedne tačke (Caspary, 1987). Elementi tih elipsi grešaka se računaju kao i elementi apsolutnih elipsi, s jednom razlikom, da se kofaktorska matrica odnosi na koordinatne razlike tačaka:

$$\mathbf{Q}_{kl}^{\Delta} = \mathbf{Q}_{kk} + \mathbf{Q}_{ll} - \mathbf{Q}_{kl} - \mathbf{Q}_{lk} \tag{2-21}$$

Relativne elipse grešaka se obično crtaju oko težišta linije koja povezuje tačke na koje se relativna elipsa grešaka odnosi.

2.3 Globalne mjere tačnosti geodetske mreže

Lokalne mjere tačnosti ne uzimaju u obzir korelacijsku zavisnost između pojedinih tačaka u mreži, pa ne odražavaju pravo stanje o postignutoj tačnosti. Stoga se kao bolje mjere za kvalitet geodetske mreže primjenjuju globalne mjere tačnosti. Globalne mjere ocjene tačnosti izražene su pomoću veličina izračunatih iz svojstvenih vrijednosti cijele kovarijacijske matrice $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Globalne mjere ocjene tačnosti nisu invarijantne na izbor referentnog koordinatnog sistema, te o tome treba voditi računa pri analizi kvaliteta neke geodetske mreže.
Ako se razmatra tačnost geodetske mreže u cjelini, onda se polazi od standardnog hiperelipsoida, koji je dat matričnom jednačinom:

$$\hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \hat{\mathbf{x}} = 1 \tag{2-22}$$

Poluose standardnog hiperelipsoida su:

$$\sqrt{\lambda_i} \qquad i = 1,2,\ldots,m \tag{2-23}$$

tj. računaju se iz svojstvenih vrijednosti kovarijacijske matrice:

$$\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \tag{2-24}$$

Kao mjera globalne tačnosti može poslužiti maksimalna svojstvena vrijednost $\lambda_{\max}$ od $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Mala vrijednost $\lambda_{\max}$ ukazuje na dobru tačnost nepoznatih veličina u geodetskoj mreži. Ako je pak $\lambda_{\max}$ znatno veće od ostalih svojstvenih vrijednosti λ_i, onda to ukazuje na različitu tačnost dijelova geodetske mreže.

Najčešće upotrebljavana mjera globalne tačnosti je aritmetička sredina svojstvenih vrijednosti kovarijacijske matrice $\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}$ (Caspary, 1987):

$$\bar{\hat{\sigma}}_{\hat{\mathbf{x}}}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \frac{1}{m} trag\left(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}\right) \tag{2-25}$$

koja se može zamijeniti standardnim odstupanjem tačke:

$$\bar{\hat{\sigma}}_P = \bar{\hat{\sigma}}_{\hat{x}} \sqrt{2} \tag{2-26}$$

Zatim se može primijeniti geometrijska sredina svojstvenih vrijednosti:

$$\bar{\bar{\hat{\sigma}}}_{\hat{x}}^2 = \sqrt[m]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_m} = \sqrt[m]{\det\left(\mathbf{K}_{\hat{\mathbf{x}}}\right)} \tag{2-27}$$

Mjera za tačnost može biti i razlika između maksimalne i minimalne svojstvene vrijednosti:

$$\lambda_{max} - \lambda_{min} \Rightarrow 0 \tag{2-28}$$

Mala razlika između maksimalne i minimalne svojstvene vrijednosti znači da hiperelipsoid prelazi u hipersferu, što za određenu geodetsku mrežu znači da u njoj postoji homogena tačnost.

3 Pouzdanost geodetske mreže

Kao što je već rečeno, pouzdanost ukazuje na mogućnost otkrivanja grubih grešaka, kao i na utvrđivanje njihovog utjecaja na tražene veličine, ukoliko nisu otkrivene grube greške. Razlikujemo unutrašnju i vanjsku pouzdanost.

Unutrašnja pouzdanost je moć, sposobnost kontrole rezultata mjerenja u procesu izravnanja. Vanjska pouzdanost se bavi utjecajem neotkrivenih grubih grešaka na konačne rezultate dobivene izravnanjem geodetske mreže (koordinate tačaka, izravnate vrijednosti, funkcije čiji su argumenti nepoznate veličine).

3.1 Utjecaj grubih grešaka na izravnate veličine

Ako mjerena vrijednost l_i sadrži grubu grešku Δl_i, onda njenu pojavu u vektoru mjerenja $\mathbf{l}$ označavamo sa:

$$\Delta \mathbf{l}^T = \left(0, 0, \ldots, \Delta l_i, \ldots 0\right) \qquad (3\text{-}1)$$

Prisustvo grube greške u vektoru mjerenja imat će utjecaj na vrijednost vektora popravaka $\mathbf{v}$ i vektor izravnatih vrijednosti $\hat{\mathbf{l}}$:

$$-\Delta \mathbf{v} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\right)\Delta \mathbf{l} = \mathbf{F}\Delta \mathbf{l}$$
$$\Delta \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\Delta \mathbf{l} = \mathbf{U}\Delta \mathbf{l} \qquad (3\text{-}2)$$

gdje su:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1} \qquad (3\text{-}3)$$

3.2 Globalne mjere unutrašnje pouzdanosti

Pojam globalne mjere pouzdanosti može se definirati kao mogućnost otkrivanja grubih grešaka u mjerenjima i njihovoga lociranja. Očita globalna mjera unutrašnje pouzdanosti je broj prekobrojnih mjerenja. Ako mjerenja nisu opterećena grubim ili sistematskim greškama onda kvadratna forma vektora popravaka:

$$\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}{\sigma_0^2} \sim \chi^2 \qquad (3\text{-}4)$$

ima χ^2 centriranu raspodjelu. U protivnom, ako su mjerenja sadrže grube ili sistematske greške, onda spomenuta kvadratna forma ima necentriranu raspodjelu sa parametrom necentralnosti λ:

$$\lambda = \frac{\mathbf{\Delta}^T\mathbf{P}\mathbf{Q}_\mathbf{v}\mathbf{P}\mathbf{\Delta}}{\hat{\sigma}_0^2} \qquad (3\text{-}5)$$

Parametar necentralnosti izražen u funkciji maksimalne svojstvene vrijednosti $\lambda_{\max}$ matrice $\mathbf{P}\mathbf{Q}_\mathbf{v}\mathbf{P}$ i vektora grešaka $\mathbf{\Delta}$ dat je sljedećim izrazom:

$$\lambda \leq \frac{\mathbf{\Delta}^T\mathbf{\Delta}}{\hat{\sigma}_0^2}\lambda\max \qquad (3\text{-}6)$$

Ukoliko je vrijednost $\lambda_{\max}$ veća, veća je i pouzdanost, pa se može usvojiti kao globalni kriterij pouzdanosti $\lambda_{\max}$. Varijanta projekta mreže koja zadovoljava taj uvjet smatra se najboljom, jer će tada biti najveći stepen pouzdanosti s aspekta mogućnosti otkrivanja grubih grešaka.
Kao alternativa za ocjenu λ može poslužiti i sljedeća formula (Caspary, 1987):

$$\lambda \leq \frac{\mathbf{\Delta}^T \mathbf{\Delta}}{\hat{\sigma}_0^2} \operatorname{trag} \mathbf{P Q_v P} \tag{3-7}$$

Za mjerenja iste tačnosti $\mathbf{P} = \mathbf{pE}$ važi:

$$\operatorname{trag} \mathbf{P Q_v P} = p \operatorname{trag} \mathbf{Q_v P} = pf \tag{3-8}$$

odakle se može zaključiti da je veća pouzdanost mreže kod koje je veći broj suvišnih mjerenja f, odnosno:

$$\operatorname{trag} \mathbf{P Q_v P} = \max \tag{3-9}$$

3.3 Lokalne mjere unutrašnje pouzdanosti

Koncept lokalne unutrašnje pouzdanosti usko je vezan s vjerovatnoćom otkrivanja grubih grešaka. Ako model ima veću vjerovatnoću otkrivanja grubih grešaka, onda ima i veću unutrašnju pouzdanost.
Utjecaj rezultata mjerenih veličina, pa time i njihovih grešaka, na vektor popravaka $\mathbf{v}$ ostvaruje se preko matrice koeficijenata $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{A N^{-1} A^T Q_l^{-1}} \tag{3-10}$$

Elementi na glavnoj dijagonali matrice $\mathbf{F}$:

$$f_i = 1 - \frac{p_{li}}{p_{\hat{l}i}} \tag{3-11}$$

su uvijek u intervalu $0 \leq f_i \leq 1$, jer je $p_{\hat{l}i} > p_{li}$. Ova veličina se naziva broj prekobrojnosti i predstavlja doprinos pojedinog mjerenja ukupnom broju prekobrojnih mjerenja. Što je f_i veći lakše se otkriva gruba greška u odgovarajućem mjerenju. Npr., ako se mjeri dužina između dvije date tačke, tada je $f_i = 1$. U tom slučaju se 100% grube greške otkriva u popravci v_i. Nasuprot tome, ništa ne utječe na određivanje nepoznatih veličina. S druge strane, kada je $f_i = 0$, znači da uopće ne postoji kontrola i-tog mjerenja, gruba greška nema utjecaja na popravke, već se u punom iznosu prenosi u određivanje nepoznatih veličina. To se dešava kada nema prekobrojnih mjerenja, npr. ako se određuje položaj tačke na osnovu mjerenja samo jedne dužine i jednog orijentiranog pravca.

Prilikom dizajniranja mreže mora se voditi računa da f_i budu što veći i pravilno raspoređeni preko cijele mreže.
Relativan broj prekobrojnih mjerenja zavisi od vrste geodetske mreže (tabela 3.1), iz koje se može zaključiti da se pouzdanost najteže postiže kod triangulacijskih mreža.

vrsta geodetske mreže	broj prekobrojnosti f_i
triangulacijska	0.1-0.2
trilateracijska	0.3-0.6
kombinirana	0.5-0.8
nivelmanska	0.2-0.5

Tabela 3.1 Pouzdanost geodetske mreže (Caspary, 1987)

Kao mjera za f_i mogu se uzeti sljedeće vrijednosti (Perović, Ašanin, 1989):

$0.00 \leq f_i < 0.01$ – bez utjecaja,

$0.01 \leq f_i < 0.10$ – slab utjecaj,

$0.10 \leq f_i < 0.30$ – prihvatljiv utjecaj, i

$0.30 \leq f_i < 1.00$ – dobar utjecaj.

Kao optimalna vrijednost za f_i može se uzeti 0.4.

Od interesa je i prosječna vrijednost broja prekobrojnosti $\bar{f} = \frac{\sum f_i}{n} = f/n$.

Na osnovu izloženog može se definirati kriterij za unutrašnju pouzdanost (Mihailović, Aleksić, 1994):

$$\text{globalna} \quad \begin{aligned} &\lambda_{\max}(\mathbf{PQ_vP}) = \max \\ &trag(\mathbf{PQ_vP}) = \max \end{aligned} \tag{3-12}$$

$$\text{lokalna} \quad \begin{aligned} &f_i = (\mathbf{Q_vP})_{ii} = \max \\ &\bar{f} = f/n = \max \end{aligned} \tag{3-13}$$

Mreža koja zadovoljava ove kriterije omogućava najveću pouzdanost otkrivanja grubih grešaka.

3.4 Globalne mjere vanjske pouzdanosti

Unatoč pažljivo provedenim procedurama testiranja i otkrivanja grubih i sistematskih grešaka u mjerenjima, ne može se sa sigurnošću zaključiti da će se sve greške otkriti i eliminirati iz Gauss-Markova modela. Osim toga, u Gauss-Markovu modelu će ostati greške koje su po vrijednosti odmah ispod granične vrijednosti grube greške. Prema tome, jedan od važnijih zadataka analize modela je određivanje utjecaja neotkrivenih grubih i sistematskih grešaka na određivanje nepoznatih koordinata.

Za geodetsku mrežu se kaže da ima bolju vanjsku pouzdanost ako neotkrivene grube i sistematske greške neznatno utječu na određivanje nepoznatih veličina.

Vektor mjerenja koji u sebi sadrži grubu grešku $\mathbf{\Delta}$ utječe na promjenu vektora nepoznatih (Caspary, 1987):

$$\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}=\Delta\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{N}^{-}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\mathbf{\Delta} \tag{3-14}$$

Kriterij pouzdanosti se može utvrditi na osnovu nejednačine

$$\mathbf{\Delta}^{T}\mathbf{\Delta}\lambda_{max}\geq\mathbf{\Delta}^{T}\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}\mathbf{\Delta} \tag{3-15}$$

gdje je $\lambda_{\max}$ maksimalna svojstvena vrijednost matričnog proizvoda $\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}$. Ako je manja vrijednost $\lambda_{\max}$, onda je i manji utjecaj neotkrivenih grubih grešaka na izravnate vrijednosti nepoznatih, odnosno veća je globalna vanjska pouzdanost.
Pošto matrični proizvod $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}$ ima sve svojstvene vrijednosti ili nula ili jedan, u slučaju mjerenja iste tačnosti $\mathbf{P}=p\mathbf{E}$ matrični proizvod $\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}$ će imati r svojstvenih vrijednosti jednakih p i $n-r$ svojstvenih vrijednosti jednakih 0. Povećanjem broja mjerenja s težinom p ne mijenja se $\lambda_{\max}$ i $trag\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}\right)$, nego se samo povećava broj $n-r$ svojstvenih vrijednosti jednakih 0.

3.5 Lokalne mjere vanjske pouzdanosti

Utjecaj jednog mjerenja s grubom greškom na izravnate nepoznate je (Caspary, 1987):

$$\Delta\hat{\mathbf{x}}_{i}=\mathbf{N}^{-}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}e_{i}\mathbf{\Delta}_{i}=\mathbf{N}^{-}a_{i}p_{i}\Delta_{i} \tag{3-16}$$

gdje je a_i i-ta kolona matrice $\mathbf{A}^T$. Dakle, prisustvo jednog grubog mjerenja se odražava na sve vrijednosti nepoznatih veličina. Jednačina (3-16) također zavisi od datuma geodetske mreže. Bolja mjera se može dobiti prelaskom na kvadratnu formu $q_{\Delta\hat{x}i}$:

$$q_{\Delta\hat{x}i}=\Delta\hat{x}_{i}^{T}\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}^{-}\Delta\hat{x}_{i}=\Delta_{i}^{2}p_{i}^{2}a_{i}^{T}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}a_{i} \tag{3-17}$$

Manja vrijednost kvadratne forme ukazuje na bolju lokalnu pouzdanost. Kriterij za vanjsku lokalnu pouzdanost se definira preko sljedećeg izraza:

$$p_{i}^{2}a_{i}^{T}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}a_{\mathrm{i}}=\min \tag{3-18}$$

koji se računa za svako pojedino mjerenje.
Prosječna vrijednost za lokalnu pouzdanost se dobiva iz zbira pojedinačnih vrijednosti:

$$\frac{\sum p_{i}^{2}a_{i}^{T}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}a_{\mathrm{i}}}{n}=\frac{1}{n}trag\left(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{N}^{-}\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}\right)=\frac{1}{n}trag\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\mathbf{P}\right)=\min \tag{3-19}$$

Može se definirati kriterij za vanjsku pouzdanost (Mihailović, Aleksić, 1994):

$$\text{globalna}\quad \begin{matrix} trag\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathrm{x}}}\mathbf{P}\right) = \min \\ \lambda_{\max}\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathrm{x}}}\mathbf{P}\right) = \min \end{matrix} \tag{3-20}$$

$$\text{lokalna}\quad \begin{matrix} p_i^2 a_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathrm{x}}} a_{\mathrm{i}} = \min \\ \dfrac{\sum p_i^2 a_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathrm{x}}} a_{\mathrm{i}}}{n} = \dfrac{1}{n} trag\left(\mathbf{P}\mathbf{Q}_{\hat{\mathrm{x}}}\mathbf{P}\right) = \min \end{matrix} \tag{3-21}$$

Može se zaključiti da su kriteriji za unutrašnju i vanjsku pouzdanost međusobno komplementarni.

4 Primjer

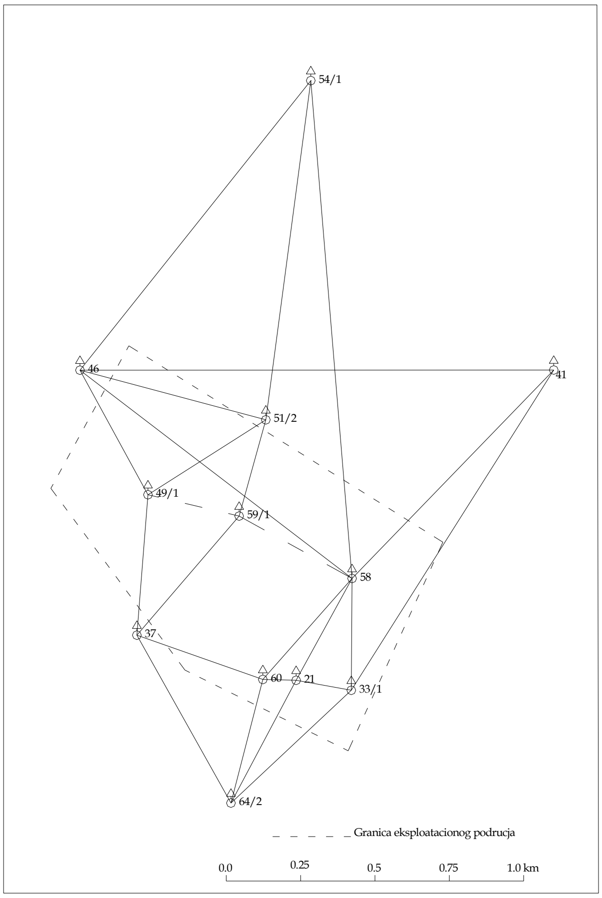
Naprijed opisani postupci primijenjeni su na mikrotriangulacijskoj mreži "Tušanj". U nastavku rada su dati skica mikrotriangulacijske mreže "Tušanj" (slika 4.1), podaci mjerenja (Tabela 4.1), kao i približne vrijednosti koordinata tačaka (Tabela 4.2).

pravac	α	pravac	α	pravac	α
21 - 64/2	0° 00' 00". 0	58 - 54/1	0° 00' 00". 0	49/1 - 46	0° 00' 00". 0
21 - 60	63° 32' 37". 5	58 - 41	48° 38' 20". 2	49/1 - 51/2	85° 57' 00". 2
21 - 58	180° 49' 47". 2	58 - 33/1	185° 07' 56". 0	49/1 - 59/1	131° 44' 14". 1
21 - 33/1	252° 27' 53". 8	58 - 21	213° 24' 08". 4	49/1 - 37	213° 00' 46". 1
37 - 49/1	0° 00' 00". 0	58 - 60	226° 03' 47". 8	51/2 - 54/1	0° 00' 00". 0
37 - 59/1	36° 01' 20". 2	58 - 59/1	303° 45' 29". 5	51/2 - 59/1	187° 54' 28". 3
37 - 60	104° 58' 05". 3	58 - 46	312° 16' 59". 4	51/2 - 49/1	229° 55' 14". 1
37 - 64/2	146° 20' 57". 1	60 - 37	0° 00' 00". 0	51/2 - 46	277° 30' 12". 7
33/1 - 41	0° 00' 00". 0	60 - 58	111° 52' 34". 3	59/1 - 37	0° 00' 00". 0
33/1 - 64/2	194° 32' 25". 2	60 - 21	161° 55' 46". 2	59/1 - 49/1	62° 42' 11". 3
33/1 - 21	248° 08' 11". 4	60 - 64/2	264° 55' 20". 1	59/1 - 51/2	154° 54' 14". 2
33/1 - 58	328° 13' 49". 8	41 - 46	0° 00' 00". 0	59/1 - 58	258° 31' 02". 3
46 - 54/1	0° 00' 00". 0	41 - 33/1	302° 11' 57". 2	64/2 - 37	0° 00' 00". 0
46 - 41	51° 33' 34". 8	41 - 58	313° 56' 12". 3	64/2 - 60	43° 32' 28". 7
46 - 51/2	66° 35' 47". 0	54/1 - 58	0° 00' 00". 0	64/2 - 21	57° 00' 14". 8
46 - 58	89° 08' 21". 9	54/1 - 51/2	12° 14' 07". 7	64/2 - 33/1	75° 52' 21". 8
46 - 49/1	113° 03' 47". 2	54/1 - 46	43° 08' 38". 8		

Tabela 4.1 Podaci mjerenja mikrotriangulacijske mreže "Tušanj"

tačka	Y	X	tačka	Y	X
21	3 583.462	3 618.911	33/1	3 768.861	3 585.168
37	3 048.074	3 771.266	49/1	3 085.371	4 245.558
41	4 449.397	4 666.727	51/2	3 481.550	4 498.590
46	2 856.838	4 666.189	54/1	3 632.652	5 644.253
58	3 771.560	3 962.764	59/1	3 391.880	4 173.541
60	3 471.440	3 621.637	64/2	3 364.375	3 204.254

Tabela 4.2 Približne vrijednosti koordinata tačaka mikrotriangulacijske mreže



Slika 4.1 Mikrotriangulacijska mreža "Tušanj"

- Ocjena tačnosti mikrotiangulacijske mreže “Tušanj”

Mjere ocijene tačnosti kod mikrotiangulacijske mreže “Tušanj” date su u tabeli 4.3, tabeli 4.4 i tabeli 4.5). Može se zaključiti da su u pogledu tačnosti najbolje određene tačke 21, 60 i 33/1, a najlošije tačke 54/1 i 41, što je i logično, jer su ove tačke na rubovima mreže.

Tačka	q_{xx}	q_{yy}	q_{xy}	λ_1	λ_2	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\sigma}_y$	Elipsa grešaka			$\hat{\sigma}_P$ 0.39%	$\hat{\sigma}_P$ 0.50%	Helmert	Werkmeister
								A	B	θ				
	m	m	m	mm	mm	mm	mm	mm	mm	° ' "	mm	mm	mm	mm
21	1.535E-06	5.782E-06	9.052E-07	6.0	1.3	1.8	3.6	3.6	1.7	78°47'43"	2.7	3.2	4.0	4.2
37	1.224E-05	7.312E-06	-4.883E-06	15.2	4.3	5.2	4.0	5.8	3.1	148°42'59"	4.6	5.4	6.6	12.0
41	2.851E-05	2.803E-05	1.222E-05	40.5	16.1	7.9	7.9	9.5	6.0	44°26'09"	7.9	9.3	11.2	37.9
46	8.936E-06	7.401E-06	-2.295E-06	10.6	5.7	4.4	4.0	4.8	3.6	144°35'04"	4.2	5.0	6.0	11.6
58	7.088E-06	4.539E-06	4.948E-07	7.2	4.4	4.0	3.2	4.0	3.1	10°36'37"	3.6	4.2	5.1	8.4
60	1.773E-06	6.016E-06	1.390E-06	6.4	1.4	2.0	3.6	3.8	1.7	73°43'12"	2.8	3.3	4.1	4.4
33/1	2.272E-06	6.348E-06	-1.459E-07	6.4	2.3	2.2	3.7	3.7	2.2	92°02'52"	3.0	3.5	4.4	5.6
49/1	8.937E-06	4.205E-06	-2.653E-06	10.1	3.0	4.4	3.0	4.7	2.6	156°12'16"	3.7	4.4	5.4	8.2
51/2	8.113E-06	9.853E-06	2.337E-06	11.5	6.5	4.2	4.7	5.0	3.8	55°32'54"	4.4	5.3	6.3	12.8
54/1	4.058E-05	1.112E-05	9.087E-06	43.2	8.5	9.5	5.0	9.8	4.3	15°50'11"	7.2	8.5	10.7	28.5
59/1	7.091E-06	9.094E-06	-2.985E-06	11.2	4.9	4.0	4.5	5.0	3.3	125°43'42"	4.2	5.0	6.0	11.1
64/2	1.462E-05	4.890E-06	2.076E-06	15.0	4.5	5.7	3.3	5.8	3.1	11°33'29"	4.5	5.3	6.6	12.2

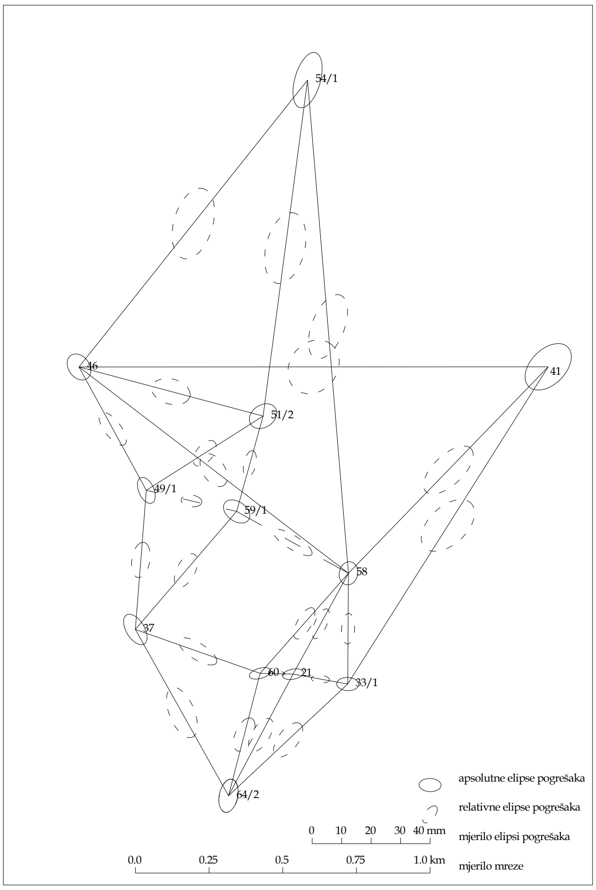
Tabela 4.3 Lokalne mjere tačnosti

od	do	A	B	θ	od	do	A	B	θ
21	64/2	6.4	3.0	30°59'49"	46	58	6.2	3.8	146°56'30"
21	60	2.8	0.8	89°04'44"	46	49/1	6.8	2.8	142°49'02"
21	58	5.5	2.1	23°32'47"	58	54/1	11.6	5.5	21°23'49"
21	33/1	3.1	1.3	94°35'46"	58	33/1	5.2	2.2	2°32'17"
37	49/1	6.1	3.1	9°20'58"	58	60	6.0	2.4	29°21'59"
37	59/1	6.2	3.1	26°46'42"	58	59/1	7.7	2.3	121°58'52"
37	60	7.5	2.8	122°07'58"	60	64/2	6.1	3.0	23°35'03"
37	64/2	9.1	4.3	157°33'53"	33/1	64/2	6.9	3.4	37°00'18"
41	46	9.8	8.1	36°57'52"	49/1	51/2	5.2	2.8	38°49'08"
41	33/1	10.9	6.4	46°24'40"	49/1	59/1	3.6	2.0	97°25'38"
41	58	10.6	5.1	46°23'09"	51/2	54/1	12.4	6.6	13°43'10"
46	54/1	12.4	6.6	15°48'59"	51/2	59/1	4.6	2.0	12°29'34"
46	51/2	6.6	4.3	104°59'24"					

Tabela 4.4 Elementi relativnih elipsi grešaka

$trag(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}})$	$\bar{\hat{\sigma}}_{\hat{x}}$	$\bar{\hat{\sigma}}_{P}$	$\bar{\bar{\hat{\sigma}}}_{\hat{x}}$	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	$\lambda_{\max}-\lambda_{\min}$
544.1514	5.2	7.4	6.4	190.8	0.2	190.6

Tabela 4.5 Globalne mjere tačnosti mikrotriangulacijske mreže "Tušanj"



Slika 4.2 Apsolutne i relativne elipse grešaka mikrotriangulacijske mreže "Tušanj"

- Pouzdanost mikrotiangulacijske mreže “Tušanj”

pravac od-do	f_i	$p_i^2 a_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} a_i$		pravac od-do	f_i	$p_i^2 a_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} a_i$
21-64/2	0.327	0.423		60-21	0.356	0.394
21-60	0.333	0.417		60-64/2	0.306	0.444
21-58	0.332	0.418		33/1-41	0.381	0.369
21-33/1	0.322	0.428		33/1-64/2	0.306	0.444
37-49/1	0.274	0.476		33/1-21	0.358	0.392
37-59/1	0.374	0.376		33/1-58	0.388	0.362
37-60	0.354	0.396		49/1-46	0.288	0.462
37-64/2	0.275	0.475		49/1-51/2	0.324	0.426
41-46	0.254	0.413		49/1-59/1	0.354	0.396
41-33/1	0.447	0.220		49/1-37	0.274	0.476
41-58	0.558	0.108		51/2-54/1	0.289	0.461
46-54/1	0.295	0.505		51/2-59/1	0.315	0.435
46-41	0.296	0.504		51/2-49/1	0.340	0.410
46-51/2	0.376	0.424		51/2-46	0.312	0.438
46-58	0.621	0.179		54/1-58	0.384	0.283
46-49/1	0.343	0.457		54/1-51/2	0.431	0.235
58-54/1	0.359	0.498		54/1-46	0.284	0.382
58-41	0.333	0.525		59/1-37	0.278	0.472
58-33/1	0.355	0.503		59/1-49/1	0.310	0.440
58-21	0.525	0.333		59/1-51/2	0.291	0.459
58-60	0.436	0.421		59/1-58	0.298	0.452
58-59/1	0.468	0.389		64/2-37	0.286	0.464
58-46	0.634	0.223		64/2-60	0.431	0.319
60-37	0.275	0.475		64/2-21	0.545	0.205
60-58	0.344	0.406		64/2-33/1	0.362	0.388

Tabela 4.6 Mjere lokalne vanjske i lokalne unutrašnje pouzdanosti

Iz tabele 4.6 može se zaključiti da se kod pravca 41-46 gruba greška najteže otkriva a da je najveći utjecaj neotkrivene grube greške na izravnate koordinate kod pravca 58-41. Također se mogu izračunati sljedeće vrijednosti:

– prosječna vrijednost broja prekobrojnosti 0.327

– prosječna vrijednost lokalne pouzdanosti 0.364

koje predstavljaju sasvim prihvatljive vrijednosti s obzirom da se radi o triangulacijskoj mreži.

5 ZAKLJUČAK

Procjena kvaliteta geodetske mreže može se izvršiti pomoću analize tačnosti i analize pouzdanosti.
Analiza tačnosti geodetske mreže može se provesti pomoći lokalnih i globalnih mjera tačnosti. Kod analize pomoću lokalnih mjera tačnosti treba voditi računa da lokalne mjere tačnosti nisu invarijantne na izbor koordinatnog sistema, lokalne mjere tačnosti ne uzimaju u obzir korelacijsku zavisnost između pojedinih tačaka u mreži, pa ne odražavaju pravo stanje o postignutoj tačnosti. Bolje mjere kvaliteta geodetske mreže su globalne mjere ocjene tačnosti. Globalne mjere ocjene tačnosti dobiju se iz veličina izračunatih iz svojstvenih vrijednosti cijele kovarijacijske matrice.
Kod mikrotriangulacijske mreže "Tušanj", standardna odstupanja koordinata, kao lokalne mjere tačnosti nalaze se u intervalu:
1.8 – 9.5 za X i 3.0 – 7.9 mm za Y koordinatu.

Od globalnih mjera tačnosti valja istaći da je standardno odstupanje položaja tačke $\bar{\hat{\sigma}}_P$=7.4 mm. Te vrijednosti pokazuju kako je postignuta visoka tačnost određivanja koordinata.
Analiza pouzdanosti slobodnih geodetske mreže provodi se pomoću unutrašnjih i vanjskih mjera pouzdanosti. Unutrašnje mjere pouzdanosti ukazuju na mogućnost otkrivanja grubih grešaka. Vanjske mjere pouzdanosti određuju utjecaj neotkrivenih grubih grešaka na nepoznate veličine, odnosno koordinate tačaka. Broj prekobrojnosti pojedinog mjerenja može se izračunati još u fazi projektiranja mreže, pa se mogu otkriti dijelovi mreže slabe pouzdanosti.

Lokalne mjera unutrašnje pouzdanosti f_i nalazi se u intervalu između **0.254 (pravac 41-46) i 0.634 (pravac 58-46)**, što navodi na zaključak da je grubu grešku najteže otkriti za pravac 41-46, a najlakše za pravac 58-46.

Lokalne mjere vanjske pouzdanosti $p_i^2 a_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} a_{\mathrm{i}}$ nalaze se u intervalu: između **0.108 (pravac 41-58) i 0.525 (pravac 58-41)**, iz čega se može zaključiti da je utjecaj neotkrivenih grubih grešaka na izravnate koordinate najveći za pravac 58-41, a najmanji za pravac 41-58.
Također se daju sljedeće vrijednosti: prosječna vrijednost broja prekobrojnosti u iznosu od 0.327, kao i prosječna vrijednost lokalne pouzdanosti 0.364, što predstavlja prihvatljivu vrijednost, s obzirom da se radi o mikrotriangulacijskoj mreži, za koju se zna da ove veličine imaju malu vrijednost.
Date vrijednosti pokazuju da projektirana mikrotriangulacijska mreža zadovoljava potrebnu tačnost i pouzdanost koja je potrebna za potrebe praćenja položajnih pomaka kontrolnih tačaka, u čiju svrhu je ova mreža uspostavljena.

Sažetak

U radu su prikazani postupci ocjene tačnosti i pouzdanosti geodetske mreže. Teoretski postupak je potkrijepljen konkretnim primjerom iz prakse. Data je ocjena tačnosti i pouzdanosti jedne mikrotriangulacijske mreže.

Abstract

In the paper the procedures of the accuracy evaluation and reliability of the geodetic network are presented. Theoretical procedure illustrated by the example from the practice. The evaluation of the accuracy and reliability of the micro-triangulation network is shown.

6 LITERATURA

CASPARY W. F., 1987: Concepts of Network and Deformation Analysis, School of Surveying, The University of New South Wales, Kensington, Australia,

GRAĐEVINSKI FAKULTET U SARAJEVU, Institut za geodeziju i geoinformatiku, 2002: STUDIJA O PRAĆENJU POLOŽAJNIH I VISINSKIH TOČAKA NA ŠIREM PODRUČJU RUDNIKA "TUŠANJ" U TUZLI, Sarajevo,

IVKOVIĆ M., BARKOVIĆ Đ., 1992: Kriteriji za ocjenu točnosti geodetskih mreža, Geodetski list, br. 4, 465-472, Zagreb,

KOCH K.R., 1987: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models, Springer Verlag,

KUANG, S., 1996: GEODETIC NETWORK ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN: *Concepts and Applications*, SAMS PUBLICATIONS,

MIHAILOVIĆ K., ALEKSIĆ I., 1994: Deformaciona analiza geodetskih mreža, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Institut za geodeziju, Beograd,

NIEMEIER W., 2002: Ausgleichungsrechnung, Walter de Gruyter Berlin New York,

PAŠALIĆ S., 1989: Račun izravnanja, Građevinski fakultet Sarajevo, Sarajevo,
PEROVIĆ G., AŠANIN S., 1989: Pouzdanost poligonometrijskih mreža, Geodetski list, 371-378, Zagreb,

VRCE E., 2006: Deformacijska analiza mikrotriangulacijske mreže posebnih namjena, Magistarski rad, Univerzitet u Sarajevu, Građevinski fakultet.