Zdravko Galić *

NOVIJI OBLICI PRELAZNIH KRIVINA NA ŽELJEZNICAMA

Zbog svoga značaja u saobraćaju, prelazne krivine su dobile veliki značaj, kako u primjeni, tako i u izučavanju. Povećanje brzina na željeznicama uslovilo je i iznalaženje novih oblika prelaznih krivina, od kojih će neke biti prikazane u ovom radu.

Na željeznicama je prelazne krivine prvi upotrijebio Pressel. On je za prelaznu krivinu usvojio krivu liniju oblika kubne parabole. Medjutim, nije uspio da iznadje i odgovarajuće metode za njenu primjenu u praksi, pa je to pitanje riješio Nördling 1867.godinę.

Matematički oblik te, tzv. proste kubne parabole dat je jednačinom:

$$y = \frac{x^3}{6RL} \qquad (1)$$

gdje je

R - poluprečnik kružne krivine

L - dužina prelazne krivine

Do jednačine /1/ se dodje, kada se u jednačinu apscisne radioide

$$y = \int \frac{\frac{x^2}{2C}}{\left(1 - \frac{x^2}{2C}\right)} dx$$

stavi da je $\frac{dy}{dx} = 0$, a C=RL .

Povećanje brzina uslovilo je povećanje dužine prelaznih krivina, pa je zbog svojih nedostataka, koji su se ispoljili, kubna parabola morala biti korigovana. Max Höfer je odredio jednačinu korigovane /popravljene/ kubne parabole:

$$y = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{L}{2R}\right)^2\right]^3}}{6RL} x^3 \qquad (2)$$

I prosta i korigovana kubna parabola spadaju u krive linije sa pravolinijskim dijagramom zakrivljenosti. Naime, zakrivljenost bilo koje krive linije data je izrazom:

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^{3/2}} \qquad (3)$$

Zanemarujući vrijednost $\frac{dy}{dx}$,dobijamo izraz kojim odredjujemo zakrivljenost krivih linija, za njihovo korišćenje u praksi:

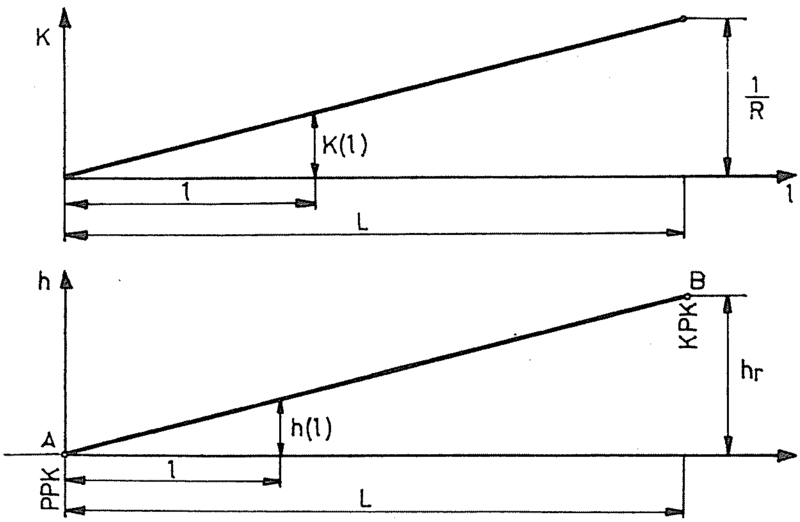
---

* Adresa autora: Zdravko Galić,dipl.ing.geod., Gradjevinski fakultet Sarajevo, Hasana Brkića 24

$$K = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (3a)$$

Za $y = \frac{x^3}{6RL}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2RL}$ a $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{RL}$ tj. $K = \frac{x}{RL}$ odnosno

$K = \frac{l}{RL}$, što predstavlja jednačinu pravca. Vidljivo je da će i za korigovanu kubnu parabolu zakrivljenost biti predstavljena jednačinom pravca. Dijagram zakrivljenosti proste kubne parabole prikazan je na sl.1.

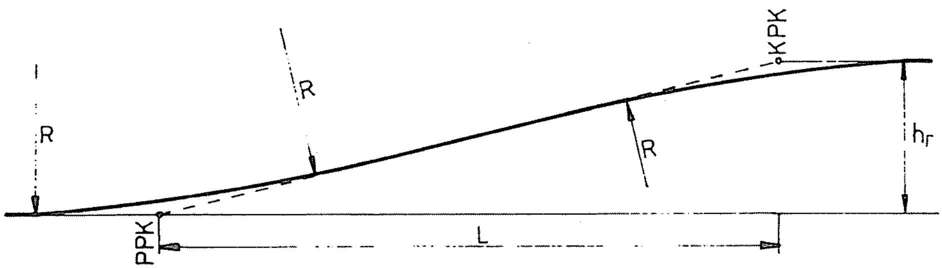


SL.1

Kada vozilo prolazi kroz kružnu krivinu odredjenom brzinom, javlja se centrifugalna sila, koja nastoji izbaciti vozilo iz krivine. Jedan dio te centrifugalne sile se poništava nadvišenjem spoljne šine - "hr". Kako u pravcu nema nadvišenja spoljne šine /jer nema djelovanja centrifugalne sile/, a u kružnoj krivini ima odredjenu vrdijenost "hr", slijedi da je promjenu nadvišenja "h" potrebno izvesti na dužini prelazne krivine - L. Na taj način dobija se tzv. prelazna rampa.

Kako promjena zakrivljenosti i promjena nadvišenja moraju biti usaglašene, slijedi da i nadvišenje "h", kod obje spomenute kubne parabole mora biti izvedeno pravolinijski. /Sl.1./. Osnovni nedostatak kubne parabole, u odnosu na kasnije nastale prelazne krivine, proizilazi upravo iz pravolinijske promjene nadvišenja spoljne šine /pravolinijske prelazne rampe/. Naime, kada se vozilo kreće preko pravolinijske prelazne rampe, sa prelomima u tačkama A i B /sl.1./, odredjenom brzinom V, javljaju se vertikalni udari u tim tačkama. Kao posljedica navedenih dinamičkih promjena prilikom prolaska vozila kroz prelaznu krivinu sa pravolinijskom prelaznom rampom, uz smanjenje komfora dolazi do deformacije kolosijeka kako u horizontalnom, tako i u vertikalnom smislu.

Navedeni nedostatak prelaznih krivina oblika kubne parabole pokušao se na izvjestan način ublažiti. To se postiglo time, što se prelazna rampa zaobljava na početku i na kraju primjenom vertikalnih krivina većeg radijusa. /Sl.2./



SL. 2

Medjutim, time je zanemaren veoma važan uslov da prelazna rampa odnosno nadvišenje spoljne šine, mora imati istovjetan tok kao i zakrivljenost prelazne krivine. U tom pravcu su usmjerena i istraživanja. Tako se, pored već poznatog uslova o postepenoj promjeni zakrivljenosti od $K=0$ do $K=\frac{1}{R}$, postavlja i uslov za medjusobnu usaglašenost zakrivljenosti i nadvišenja spoljne šine. Uvodjenje brzina na željeznicama, većih od dosadašnjih /što je u dosta zemalja već aktualizirano/, uslovljava i upotrebu novih prelaznih krivina, što od geodetskih stručnjaka zahtijeva njihovo poznavanje, barem u osnovnom smislu.

Ovdje će biti prikazene one koje se, ili ispituju, ili su već primijenjene u praksi.

1. PARABOLA ČETVRTOG STEPENA

Prvi put, ova kriva linija je upotrijebljena u Njemačkoj još 193o.godine. Bila je namijenjena za pruge na kojima bi se saobraćaj odvijao maksimalnom brzinom od 16o km/h. Odredjena je jednačinom:

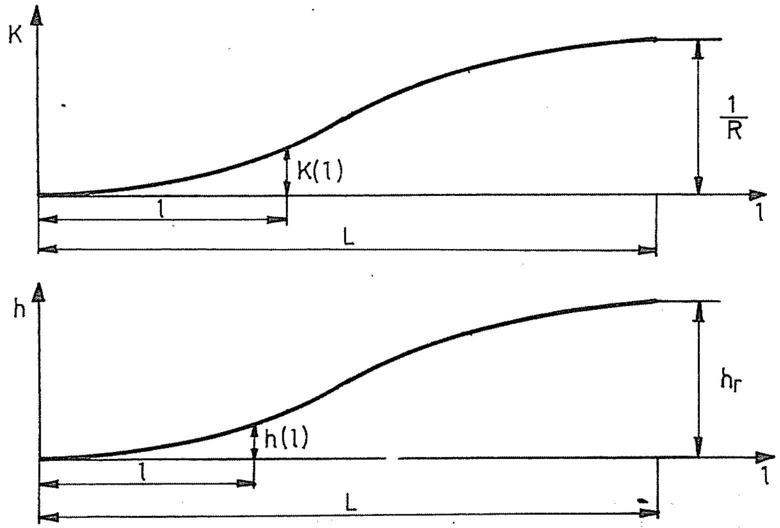
$$y=\begin{cases} \dfrac{x^4}{6RL^2} & \text{za} \quad 0\leq x = \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{L^2}{48R}-\dfrac{\left(x-\frac{L}{2}\right)^2}{2R}-\dfrac{(L-x)^4}{6RL^2} & \text{za} \quad \dfrac{L}{2}\leq x\leq L \end{cases} \qquad (4)$$

Zakrivljenost ove prelazne krivine, kao i nadvišenje spoljne šine su definisani slijedećim jednačinama:

$$K = \begin{cases} \dfrac{2}{RL^2} l^2 & \text{za} \quad 0 \leq l \leq \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{R} - \dfrac{2}{RL^2}(L-l)^2 & \text{za} \quad \dfrac{L}{2} \leq l \leq L \end{cases} \qquad \textbf{(4a)}$$

$$h = \begin{cases} \dfrac{2h_r}{L^2} l^2 & \text{za} \quad 0 \leq l \leq \dfrac{L}{2} \\[2ex] h_r - \dfrac{2h_r}{L^2}(L-l)^2 & \text{za} \quad \dfrac{L}{2} \leq l \leq L \end{cases} \qquad \textbf{(4b)}$$

Dijagrami ovih funkcija prikazani su na slici 3.



SL.3

2. KOSINUSOIDA

Ova prelazna krivina, za razliku od drugih koje će biti razmotrene, već je našla svoju primjenu u praksi. Naime, kosinusoida je upotrijebljena kao prelazna krivina na čuvenoj pruzi Tokio - Osaka /Tokaydo pruga/. Saobraćaj na ovoj pruzi se odvija brzinom od 2oo km/h, sa tendencijom porasta na 22o km/h.

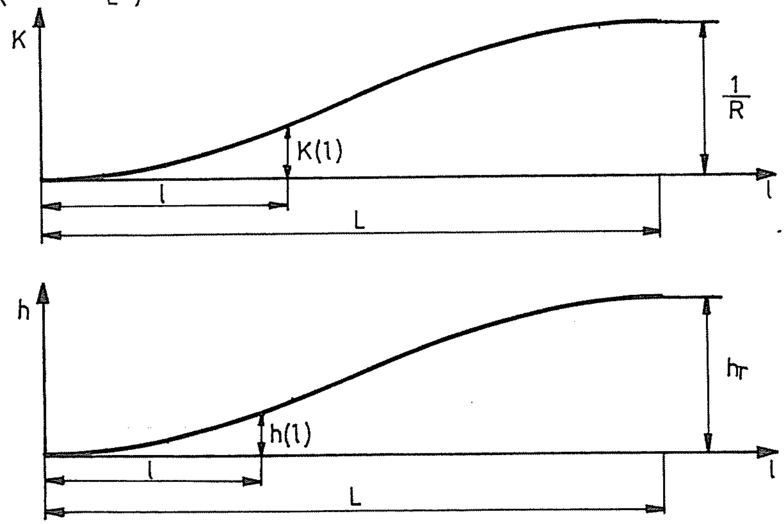
Matematički oblik ove krive linije dat je jednačinom:

$$y = \frac{x^2}{4R} - \frac{L^2}{2\pi^2 R}\left(1 - \cos\frac{\pi x}{L}\right) \qquad (5)$$

Zakrivljenost i nadvišenje spoljne šine kosinusoide odredjeni su jednačinama /5a/, odnosno /5b/, a njihovi dijagrami su prikazani na slici 4.

$$K = \frac{1}{2R}\left(1 - \cos\frac{\pi l}{L}\right) \qquad (5a)$$

$$h = \frac{h_r}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi l}{L}\right) \qquad (5b)$$



SL.4

3. SINUSOIDA

Kriva linija definisana jednačinom /6/ još nije upotrijebljena kao prelazna krivina. Medjutim, već duže vremena se ispituje u Njemačkoj, i zbog svojih vozno - dinamičkih karakteristika je pogodna za primjenu na prugama sa brzinama i većim od 2oo km/h.

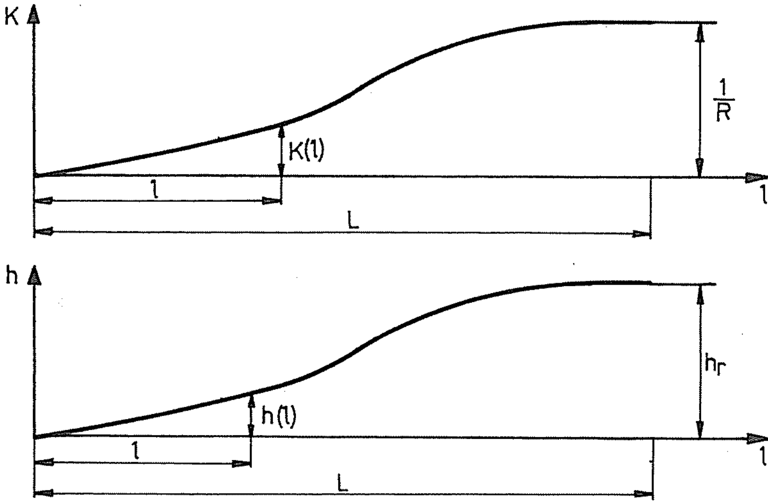
$$y = \frac{x^3}{6RL} - \frac{L}{4\pi^2 R}\left(x - \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right) \qquad (6)$$

Zakrivljenost i nadvišenje spoljne šine sinusoide je:

$$K = \frac{x}{RL} - \frac{1}{2R\pi}\sin\frac{2\pi l}{L} \qquad (6a)$$

$$h = \frac{h_r x}{L} - \frac{h_r x}{2\pi}\sin\frac{2\pi l}{L} \qquad (6b)$$

Dijagrami ovih krivih linija su prikazani na slici 5.



SL.5

4. POLINOM SEDMOG STEPENA

I ova kriva linija je zbog svojih karakteristika, takodje po-godna za primjenu na prugama sa brzinama većim od dosadašnjih.

Matematički oblik ovog polinoma je:

$$y = \frac{L^2}{14R}\left[2\left(\frac{x}{L}\right)^7 - 7\left(\frac{x}{L}\right)^6 + 7\left(\frac{x}{L}\right)^5\right], \qquad (7)$$

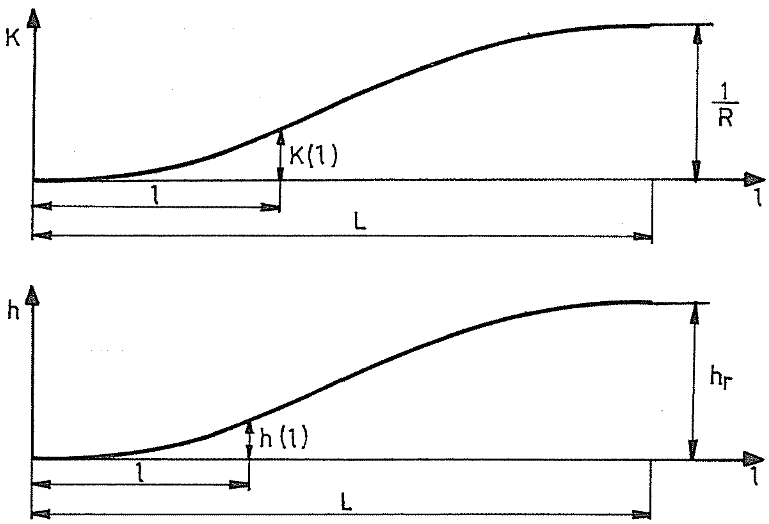
Zakrivljenost je

$$K = \frac{1}{R}\left[6\left(\frac{l}{L}\right)^5 - 15\left(\frac{l}{L}\right)^4 + 10\left(\frac{l}{L}\right)^3\right] \qquad (7a),$$

a nadvišenje spoljne šine:

$$h = h_r\left[6\left(\frac{l}{L}\right)^5 - 15\left(\frac{l}{L}\right)^4 + 10\left(\frac{l}{L}\right)^3\right] \qquad (7b)$$

Dijagrami zakrivljenosti i nadvišenja su dati na slici 6.



SL. 6

5. KLOTOIDA

Klotoida se dugo vremena isključivo upotrebljavala kao prelazna krivina na putevima. U novije vrijeme se sve više upotrebljava i na željeznicama. To je kriva linija koja u potpunosti zadovoljava uslov o postepenoj primjeni zakrivljenosti od $K = 0$ do $K = \frac{1}{R}$. Polazeći upravo od toga uslova, dolazi se do njene parametarske jednačine:

$$y = \frac{l^3}{6RL} - \frac{l^7}{336R^3L^3} + \frac{l^{11}}{42\,240R^5L^5} - \frac{l^{15}}{9\,676\,800R^7L^7} + \cdots \qquad (7b)$$

$$x = l - \frac{l^5}{40R^2L^2} + \frac{l^9}{3\,456R^4L^4} - \frac{l^{13}}{599\,040R^6L^6} + \cdots \qquad (7a)$$

Kako je kod klotoide promjena zakrivljenosti linearna, i nadvišenje, tj. prelazna rampa mora biti pravolinijski izvedena. To za posljedicu ima pojavu vertikalnih udara, u svoj svojoj veličini u tačkama preloma A i B /Sl.1./. Dakle i klotoida, kao i kubna parabola, ima iste nedostatke, koji se naročito ispoljavaju kod primjene velikih brzina na željeznicama.

Neke karakteristike prelaznih krivina sa krivolinijskom promjenom nadvišenja spoljne šine

Sve veći razvoj saobraćaja zahtijeva i povećanje brzina na željeznicama. Na tom planu, u nekim zemljama su postignuti i odredjeni uspjesi. Ilustracije radi spomenimo da je u SAD-u postignuta brzina od

4o2 km/h, a na pruzi Pariz - Lion, 1955.godine, brzina od 335 km/h. Ove, rekordne brzine, su postignute na prugama napravljenim specijalno za tu svrhu. Zbog toga je važno napomenuti da je u Italiji početkom 1977.godine puštena u redovan saobraćaj pruga Firenca - Rim, na kojoj se može postići max. brzina od 25o km/h.

Kada se vozila kreću velikim brzinama kroz prelazne krivine sa pravolinijskom prelaznom rampom, vidjeli smo, javljaju se vertikalni udari, što ima za posljedicu smanjenje komfora i deformacije kolosijeka, a time i otežavanje održavanja kolosijeka. Iz dijagrama zakrivljenosti i nadvišenja za prelazne krivine oblika parabole 4. stepena, kosinusoide, sinusoide i polinoma 7.stepena, vidljivo je da su oni medjusobno usaglašeni, odnosno da imaju isti tok, što je od velikog značaja za njihovu primjenu na željeznicama sa velikim brzinama.

Kako su vozno-dinamičke karakteristike odredjene prelazne krivine u direktnoj zavisnosti od njene zakrivljenosti, odnosno promjene nadvišenja spoljne šine, interesantno je vidjeti na praktičnom primjeru kako se mijenja nadvišenje "h" za svaku navedenu krivinu, u zavisnosti od brzine i radijusa kružne krivine. Sračunat ćemo i veličinu kružnog pomaka "f", za koji je potrebno kružnu krivinu povući unutar tangenti, da bi se dobio prostor za ubacivanje prelazne krivine.

Uzmimo da je V = 16o km/h i R = 3ooo m. Za date parametre dobiju se potrebne dužine prelaznih krivina:

- za kubnu parabolu L = 1oo m
- za parabolu 4. stepena L = 15o m
- za kosinusoidu L = 12o m
- za sinusoidu L = 12o m
- za polinom 7.stepena L = 15o m

Računanje je izvršeno na elektronskom računaru IBM 4331.

Iz tabele 1. se vidi, da za odredjeni poluprečnik kružne krivine, brzinu i nadvišenje spoljne šine "hr" u kružnoj krivini, svaka prelazna krivina zahtijeva odredjenu dužinu na kojoj je potrebno izvesti promjenu nadvišenja, od h = o do h = hr. Tako je npr. za kubnu parabolu potrebna dužina L = 1oo m, iz čega proizilazi da je kod ove prelazne krivine, promjena nadvišenja "najbrža", što se jasno vidi iz tabele, uporedjujući veličine "h" za odredjenu dužinu prelazne krivine"l".

Veličina kružnog pomaka "f" , kod kubne parabole, veća je u odnosu na ostale /izuzev kod parabole 4.stepena/. Kod eventualnih rekonstrukcija pruga u cilju njihovog prilagodjavanja za veće brzine, prelazne krivine oblika kosinusoide i sinusoide bi imale prednost, naročito u odnosu na kubnu parabolu. Tada bi se prelazne krivine potrebne dužine, mogle ubacivati bez smanjenja poluprečnika postojećih kružnih krivina, što bi svakako predstavljalo odredjene uštede.

Iz svega izloženog proizilazi, da prelazne krivine sa krivolinijskom promjenom nadvišenja spoljne šine /krivolinijskom prelaznom rampom/ imaju dosta prednosti u odnosu na dosada upotrebljavane prelazne krivine. I prilično jednostavan matematički oblik kubne parabole, izgubio je svoj značaj. Za današnji stepen razvoja računske tehnike, sasvim je svejedno kako je prelazna krivina matematički definisana. Koristeći savremene računare, lako dolazimo do svih elemenata potrebnih za njeno obi-

TABLLA 1. NADVIŠENJE H (MM) I KRUŽNI POMAK F (M)

L (M)	KUBNA PARAB.	PARABOLA 4.STEP.	SINU-SOIDA	KOSI-NUSOIDA	POL. 7.STEP.
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10.0	6.8	0.6	5.7	1.2	0.2
20.0	13.6	2.4	11.3	4.6	1.3
30.0	20.4	5.4	17.0	10.0	3.9
40.0	27.2	9.7	22.6	17.0	8.3
50.0	34.0	15.1	28.3	25.2	14.3
60.0	40.8	21.8	33.9	34.0	21.6
70.0	47.6	29.6	39.5	42.8	29.8
80.0	54.4	38.4	45.2	51.0	38.2
90.0	61.2	46.2	50.8	58.0	46.4
100.0	68.0	52.9	56.4	63.4	53.7
110.0		58.3	62.0	66.8	59.7
120.0		62.6	67.6	68.0	64.1
130.0		65.6			66.7
140.0		67.4			67.8
150.0		68.0			68.0

F	0.139	0.156	0.078	0.111	0.134

lježavanje na terenu. Time je i značaj tablica za obilježavanje krivina znatno smanjen.

LITERATURA

1. Cerovac V. : Prelazna krivina oblika polinoma sedmog stupnja, Željeznice 1977
2. Janković M.: Inženjerska geodezija II dio
3. Megyeri J. : Vasúti vagánygeometria
4. Veljković B.: Saobraćajnice
5. Weigend H.: Übergangsbogen mit sinus-förmigerkrümmungslinie bei Gegenbogen, Der Eisenbahningenieur 1975
6. Žnideršič B.: Priručnik za obeležavanje prelaznica oblika klotoide polarnim koordinatama