# MOGUĆNOST PRIMJENE SUVREMENIH MATEMATIČKO-NUMERIČKIH POSTUPAKA U KOMASACIJI ZEMLJIŠTA

Ivković Đorđe - Prijedor x

## 1. UVODNE NAPOMENE

Zbog ograničenog prostora nije objektivno moguće razraditi i pokazati sve relevantne aspekte, ali se zato nastoje naglasiti osnovne karakteristike i bitne činjenice za uspješno korištenje nekih matematičko-numeričkih metoda pri rješavanju geodetskih zadataka, a naročito u sprovodjenju komasacije zemljišta. Ovdje se nastoji, na izvjestan prihvatljiv način, ukazati na osnovnu namjeru za neophodnim povišenjem stupnja automatizacije promatranih procesa u komasaciji uz insistiranje na postizanju što veće objektivnosti i pouzdanosti dobivenih rezultata na temelju polaznih katastarskih podataka, koristeći se kompjuterima.

Naime, u geodetskoj djelatnosti kod nas u SFRJ, posebno u SR BiH, do sada nisu dovoljno ugradjena nova shvaćanja u dva veoma važna njena područja, tj. u katastru i komasaciji zemljišta. Stoga se želi da ovdje iznijetim argumentima da izvjestan doprinos uvodjenju novog pristupa, koji se zasniva na svrsishodnoj aplikaciji suvremenih matematičkih metoda uz istovremene neosporne koristi koje se mogu dobiti u praktičnom radu.

Naravno, za uvrštavanje novog pristupa potrebno je prethodno realiziranje izvjesnih preduvjeta, pa za sada ostaje otvoreno pitanje koliko se već sada ili u skorašnjoj budućnosti mogu i u nas transferirati suvremena dostignuća nauke u svijetu u cilju napretka cijele geodetske djelatnosti, a naročito u katastru i komasaciji zemljišta, kao njenih pripadnih grana s velikim praktičnim značenjem. Zato ovaj prikaz ima informativan karakter i zadržava se samo na dva vrlo osjetljiva postupka u komasaciji zemljišta: u nadiobi zemljišta i odredjivanju procjembenih vrijednosti parcela koje ulaze u komasacijsku gromadu.

U tom smislu će se u jednoj sažetoj formi uz praktične primjere na sintetičkom modelu analizirati značaj i prilagodljivost primjene matematičkog optimiranja u nadiobi zemljišta, te primjene tzv. metode kolokacije odnosno njenog kraćeg oblika - postupka "predikcije" u odredjivanju koeficijenta relativne vrijednosti zemljišnih čestica.

---

x Predmetna razmatranja su povezana s autorovim magistarskim radom pod naslovom "Neki primjeri boljeg iskorištenja informacijskog sadržaja katastarsko-geodetskih podataka primjenom numeričko-statističkih metoda".
Adresa autora: Ivković Đorđe, Opštinska geodetska uprava, Prijedor.

## 2. ILUSTRATIVNI PRIMJER PRIMJENE METODE OPTIMIRANJA

Ovaj sasvim uprošćen primjer je odabran tako da bi se ilustriralo postavljanje problema optimiranja u nadiobi zemljišta i dobivanje njegovog rješenja. Neka 4 sudionika /učesnika/ A, B, C i D mogu na temelju njihovih u komasacijskoj gromadi uzetih zemljišnih čestica postaviti zahtjeve na nadiobu površina $F_s$ /prema primjeru W.Hopfeldu/:

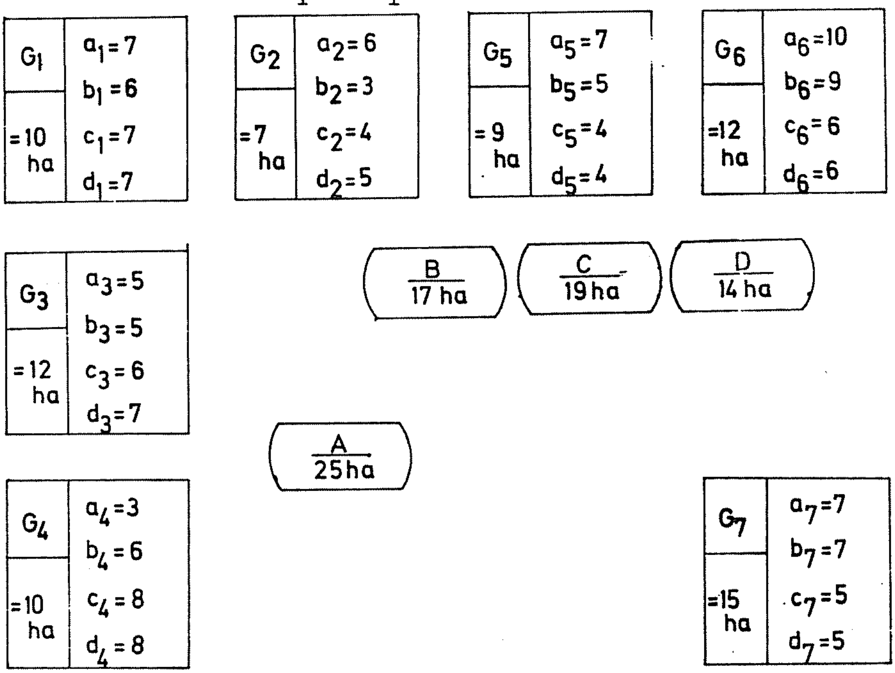
$$F_A = 25 \text{ ha}, \quad F_B = 17 \text{ ha}, \quad F_C = 19 \text{ ha}, \quad F_D = 14 \text{ ha},$$

a neka na raspoloženju stoji zemljište u sedam blokova $G_i$ /dijelova tabli/:

$$G_1 = 10 \text{ ha}, \quad G_2 = 7 \text{ ha}, \quad G_3 = 12 \text{ ha}, \quad G_4 = 10 \text{ ha},$$

$$G_5 = 9 \text{ ha}, \quad G_6 = 12 \text{ ha}, \quad G_7 = 15 \text{ ha}.$$

Ove površine treba podijeliti u skladu sa zahtjevima, ali tako da je put učesnika do njihovih površina optimalan, tj. da bude minimalan. Prema geografskim položajima (učesnika i blokova) proizilaze ove moguće udaljenosti $a_i$ do $d_i$ (u kilometrima):




Sl. 1.

Primjer je zaista jednostavan, jer su uzeta samo četiri učesnika, pojavljuje se jako malo restrikcija, a uz to ne samo da je suma F-ova jednaka sumi G-ova (75 ha), već su takodjer kulture i klase čestica formalno isključene. U tom slučaju važeći matematički odnosi dadu se lako prikazati u ovoj tabeli:

Tabela - shema varijabli

| UČESNIK | BLOK / Fs \ Gi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 ha | 7ha | 12ha | 10ha | 9ha | 12ha | 15ha |
| A | 25ha | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
| B | 17ha | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ |
| C | 19ha | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ |
| D | 14ha | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $D_6$ | $D_7$ |

Gornje veličine $A_i$, $B_i$, $C_i$, $D_i$ / i = 1,2 ..., 7) su varijable koje smiju poprimiti vrijednosti od 0 do 1. Kada neki od učesnika nema udjela u promatranom bloku, tada će pripadna varijabla biti jednaka nuli, a samo u slučaju kad učesnik ima potpuni (jedini) udjel u bloku $G_i$ poprima odgovarajuća varijabla maksimalni iznos od 1,000. Da bi rješenje (postavljenog problema) bilo ostvarivo, moraju biti ispunjene slijedeće zavisnosti (2. - 1), (2.-2) i (2.-3).

Radi potpunog namiranja svakog od učesnika najprije se trebaju uvažiti 4 uvjeta (po redovima prednje table):

$$10A_1 + 7A_2 + 12A_3 + 10A_4 + 9A_5 + 12A_6 + 15A_7 = 25$$

$$10B_1 + 7B_2 + 12B_3 + 10B_4 + 9B_5 + 12B_6 + 15B_7 = 17$$

$$10C_1 + 7C_2 + 12C_3 + 10C_4 + 9C_5 + 12C_6 + 15C_7 = 19$$

$$10D_1 + 7D_2 + 12D_3 + 10D_4 + 9D_5 + 12D_6 + 15D_7 = 14$$

Zatim dolazi sedam uvjeta (po stupcima tabele) koji trebaju biti ispunjeni za potpunu nadiobu svakog od blokova Gi:

$$A_i + B_i + C_i + D_i = 1 \quad ( i = 1,2,..., 7) \;..\; (2. - 2)$$

Po prirodi stvari pojavljuju se još i tzv. <u>uvjeti nenegativnosti</u>:

$$A_i \geqslant 0$$
$$B_i \geqslant 0 \qquad \text{.........................} \quad (2. - 3)$$
$$C_i \geqslant 0$$
$$D_i \geqslant 0$$

Povezanost izraza (2. - 2) i (2. - 3) isključuje istovremeno da neka varijabla može biti veća od 1. Prednje tri relacije odredjuju u ovom primjeru postojeće tri restrikcije.

Kao optimirajući kriterij za uspješnost /kakvoću/ nadiobnog postupka može se za svakog učesnika uzeti odnos (kvocijent) izmedju površine nadijeljene čestice prema putnoj udaljenosti, a to je povoljnije što je odnos veći. Kao "ciljna" funkcija mogla bi zato (prema W. Hapfeldu) poslužiti suma tih kvocijenata, tj.

$$Z = \sum_{a_i}^{1} A_i G_i + \sum_{b_i}^{1} B_i G_i + \sum_{c_i}^{1} C_i G_i + \sum_{d_i}^{1} D_i G_i \quad \dots \quad (2. - 4)$$

$$Z = \frac{10}{7} A_1 + \frac{7}{6} A_2 + \frac{12}{5} A_3 + \dots + \frac{9}{4} D_5 + \frac{12}{6} D_6 + \frac{15}{5} D_7 \quad \dots (2. - 4')$$

Tako sada relacija (2. - 1) do (2. - 4) odnosno (2. - 4') predstavljaju matematičku formulaciju optimiranja procesa nadjelbe u promatranom jednostavnom slučaju.

Medjutim, uzeti ovdje pojednostavljeni problem sadrži 28 varijabli, koje se medjusobno povezane sa 11, tj. sa (2. - 1) plus (2. - 2), jednadžbi pa proizilazi da on tako ima 17 stupnjeva slobode. Ali beskonačni broj rješenja je dodatno sužen s relacijama (2. - 3) za uvjete nenegativnosti.

Kao što je poznato, podordredjene matematičke zavisnosti ove vrste mogu se riješiti uz pomoć metoda matematičkog optimiranja. Zapravo, ovdje već dolazi u obzir jednostavno linearno programiranje, od čijih je numeričkih postupaka naročito raširena Simplex - metoda. Primjenom te metode odnosno gotovog programa za izračunavanje na kompjuteru proizašle su za optimalno rješenje ove vrijednosti varijabli:

$$A_3 = 1, \quad A_4 = 1, \quad A_7 = 0{,}200, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 1,$$
$$C_5 = 1, \quad C_7 = 0{,}667, \quad D_1 = 1, \quad D_7 = 0{,}133$$

Ostale varijable ($A_1$, $A_2$, $A_5$, $A_6$ ; $B_3$ do $B_7$ ; $C_1$ do $C_4$, $C_6$ i $D_2$ do $D_6$ ) su jednake nuli. Uvrštenjem tih numeričkih iznosa u sistem (2. - 1) proizilazi da se treba ovako nadijeliti:

učesniku A: 12 ha u bloku $G_3$, 10 ha u bloku $G_4$ i 3 ha u bloku $G_7$,

učesniku B: 10 ha u bloku $G_1$, 7 ha u bloku $G_2$,

učesniku C: 9 ha u bloku $G_5$, 10 ha u bloku $G_7$, a

učesniku D: 12 ha u bloku $G_6$ i 2 ha u bloku $G_7$.

Da se barem pokaže kako i koliko se promjene rezultati u naprijed izradjenom zadatku kad se samo za jednu varijablu promjeni vrijednost, npr. umjesto njene iznadjene vrijednosti jednake 1, stavi da mora biti 0, npr. uvrštena je naknadno restrikcija:

$B_1 = 0$ .............................. (2. - 5)

Doista u tek za toliko malo modificiranom slučaju proizilazi znatno drugačije optimalno rješenje za plan nadiobe, koje sada glasi:

učesnik A: 10 ha u bloku $G_1$, 5 ha u bloku $G_3$, 10 ha u bloku $G_5$

učesnik B: 7 ha u bloku $G_2$, 7 ha u bloku $G_3$, 3 ha u bloku $G_5$

učesnik C: 4 ha u bloku $G_5$, 15 ha u bloku $G_7$,

učesnik D: 2 ha u bloku $G_5$, 12 ha u bloku $G_6$.

Štoviše i izračunata vrijednost ciljne funkcije se od prijašnjih z = 16,812 nešto smanjila zbog prirodnog ograničenja na iznos od z = 16,595. Najvažnije je ipak ostvarena pouzdana objektivnost u izradi plana nadiobe zemljišta, ali i postignut povećani stupanj automatizacije u rješavanju postavljenog problema. Izvan svake je sumnje da se na sadašnji način bez pomoći računa optimiranja ne može u toj mjeri objektivno, a istovremeno i toliko automatizirano sprovesti proces nadjelbe zemljišta, napose, naročito u kompliciranim praktičnim slučajevima. U stvarnosti u odnosu na obje obradjene varijante ovdje razmatranog ilustrativnog primjera - će se pojaviti prema stvarnim situacijama daleko veći broj učesnika i komasacijskih tabli ili blokova, pa će ukupni broj uvjetnih jednadžbi odnosno nejednadžbi (restrikcija) tada jako porasti, a bit će potrebno i više parcijalnih "ciljnih" funkcija. Na taj način i matematička formulacija problema nadjelbe zemljišta u komasacijskim postupcima postaje znatno kompliciranija, premda ovdje prikazani osnovni pristup ostaje identičan.

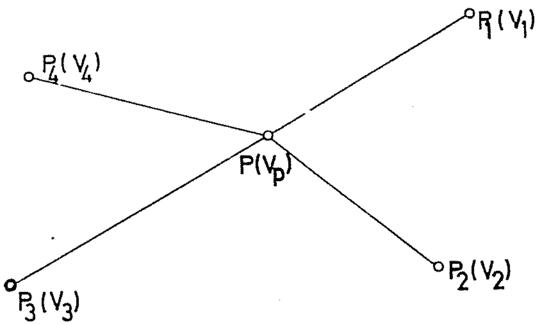
## 3. ILUSTRATIVNI SINTETIČKO-NUMERIČKI PRIMJER PRIMJENE POSTUPKA "PREDIKCIJE" U ODREĐIVANJU KOEFICIJENTA VRIJEDNOSTI ČESTICA U KOMASACIJSKOJ GROMADI

Na ovom mjestu treba istaknuti da prednje uvodjenje načina optimiranja u planiranju nadiobe zemljišta je omogućilo izradu automatskog nadiobnog plana u komasaciji zemljišta. Odgovarajući nadiobni model je praktični ostvaren, a za rješenje je uspješno upotrebljena Monte-Carlo-metoda. Medjutim, zbog neizbježnih prigovora učesnika u nadiobi, za sada ne bi se mogao ekonomski zastupati ovaj metod optimiranja, jer kod zadovoljavanja novih uvjeta ponovo se mora odredjivati novi traženi plan nadiobe.

Ipak, obzirom na činjenicu da ovakav pristup uvijek osigurava neophodnu objektivnost i optimalna rješenja, treba uložiti napore da se ovaj prigovor učesnika smanji, ako se neda sasvim ukloniti. S pravom se može očekivati da će u smislu smanjivanja prigovora učesnika, koji se najvećim dijelom odnose na procjembenu vrijednost zemljišta, značajni doprinos može pružiti upravo primjena metode kolokacije odnosno metoda "predikcije" u indirektnom odredjivanju jedinične vrijednosti površine za "ciljne" zemljišne čestice.

Ovim radom se želi pokazati kako se može dobrim dijelom izbjeći subjektivni uticaj procjenitelja, primjenom metode kolokacije ili jednostavnijeg postupka "predikcije" u egzaktnijem iznalaženju koeficijenata relativne vrijednosti tzv. "ciljnih" parcela. Naime, ovdje se pretpostavlja da su koeficijenti relativnih vrijednosti svih "ciljnih" parcela pod uticajem koeficijenata relativne vrijednosti okolnih "uzornih" parcela. Time se (apriori) praktično ukidaju procjembeni razredi, koji su služili procjenitelju za razvrstavanje "ciljnih" parcela, jer se primjenom postupka "predikcije" odredjuje (izračunava) relativna vrijednost za svaku pojedinu "ciljnu" parcelu, tj. pomoću interpolacije izračunava se ova vrijednost u odnosu na poznate relativne vrijednosti okolnih "uzornih" parcela. Poseban je problem do kojeg će maksimalnog radijusa biti uticaj "uzorne" na "ciljnu" parcelu. Njega treba posebno izučiti. Obzirom na ograničenost ovog rada, ovaj problem nije razradjivan, ali se naznačuje da postoji, te o njemu treba voditi računa.

Da bi se ipak dobila već u sadašnjoj situaciji makar i štura predstava o mogućnostima i prednostima metode kolokacije, odnosno "predikcije", uzet je za praktični numerički primjer jedan pojednostavljeni sintetički model. Odabrani sintetički model sastoji se iz samo četiri "uzorne" parcele $P_1$, $P_2$, $P_3$ i $P_4$, koje imaju položajne koordinate $X_i$ i $Y_i$ i koeficijente relativnih vrijednosti $V_i$, čije su vrijednosti odredjene prema uobičajenom metodom. Peta tačka P je reprezentant promatrane zemljišne čestice, tzv. "ciljne" parcele za koju se traži numerički iznos njenog koeficijenta relativne vrijednosti $V_p$. On je u tački P na neki način pod uticajem koeficijenta relativnih vrijednosti ovih četiri "uzornih" parcela $P_i$, s tim da treba uzeti u obzir i njihov raspored, kako je prikazan na sl.2.




Sl. 2.

U tabeli 1-a prikazani su zadani podaci za izračunate procijenjene vrijednosti i koordinate centrioida tzv. "uzornih" parcela, a postupak rada u ovom ilustrativnom primjeru tekao je ovim redosljedom:

1. Iz zadanih koordinata $X_i$ i $Y_i$ i koeficijenta relativne vrijednosti $V_i$ (lijeva strana tabele) najprije su odredjene srednje vrijednosti $X_s$, $Y_s$, i $V_s$, a zatim izračunate i u desnom dijelu iste tabele upisane razlike:

$$X_i - X_s = x_i; \quad Y_i - Y_s = y_i; \quad V_i - V_s = 1_i \quad \ldots \quad (3. - 1)$$

Numerička vrijednost od 0,25 za $V_s$, tj. za približni iznos koeficijenta relativne vrijednosti u tački P dobivena je približnom grafičkom interpolacijom iz profila $P_1 - P_3$.

---

x "Ciljne" parcele - odnosi se na parcele u komasacijskoj gromadi za koje treba odrediti relativnu vrijednost na osnovu usporedbe sa "uzornim" parcelama.

| Parcela | $X_i$ | $Y_i$ | $v_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $l_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | 610 | 490 | +0.18 | +180 | +165 | -0.07 |
| $P_2$ | 410 | 420 | +0.36 | - 20 | + 95 | +0.11 |
| $P_3$ | 110 | 170 | +0.55 | -320 | -155 | +0.30 |
| $P_4$ | 590 | 220 | +0.15 | +160 | -105 | -0.10 |
| P | 450 | 350 | - | + 20 | + 25 | - |
| | | | | | | |

Tabela 1a-: Koordinate i relativni koeficijenti, srednje vrijednosti: $X_s = 430$ m, $Y_s = 325$ m, $V_s = 0,25$.

2. Primjena Hirvonen-ove formule x) (Wolf, 1979.):

$$C_s(d) = \frac{C_s(o)}{(1+\frac{d}{d_o})^2} \qquad \text{............ 3. - 2}$$

uvodi se umjesto matrice kovarijance $\underline{C}_{ss}$ sada teorijska funkcija kovarijance $C_s$ (d), pri čemu je d - horizontalna udaljenost svake parcele $P_i$, odnosno njihovih centroida do ciljne tačke P. Za varijancu $C_s$ (o) i "polovičnu širinu" $d_o$ ovdje je uzeto jednostavno:

$$C_s(o) = (0,1)^2 \text{ i } d_o = 200 \text{ m}$$

Također se pretpostavlja da je izrazom:

$$\underline{C}_{nn} = \underline{E} \cdot (0,03)^2$$

unaprijed zadana dijagonalna matrica varijance - kovarijance pogrešaka ("šuma") $\underline{n}$, dok $\underline{E}$ je jedinična matrica, a vrijednost (0,03) uzeta je apriori.

Horizontalne udaljenosti se izračunavaju iz položajnih koordinata promatrane tačke P s jedne strane i svake od tačaka $P_i$ s druge strane; dobivene vrijednosti su pregledno svrstane u tabeli 1-b:

x Radi jednostavnosti primijenjena je Hirvoven-ova relacija, a mogla se uzeti i neka druga teoretska funkcija s tzv. opadajućim (zvonolikim) karakterom. Stoga uzevši ispravna je bila primjena empirički iznađene funkcije kovarijance, što ovdje iz objektivnih razloga nije moglo doći u obzir.

| ka | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| od | | | | | |
| $P_1$ | d= | 212 | 594 | 271 | 213 |
| $P_2$ | | | 391 | 269 | 81 |
| $P_3$ | | | | 483 | 385 |
| $P_4$ | | | | | 191 |

Tabela 1-b: Horizontalne udaljenosti izmedju centroidnih tačaka parcela.

3. Prema (Wolf, 1979.) proizilazi za model "jednostavne" kolokacije izraz:

$$\underline{l} + \underline{n} = \underline{A}\,\underline{X} + \underline{s} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.-3$$

gdje je: $\underline{l}$ - vektor opažanja, $\underline{x}$ - vektor nepoznanice /trend-parametara), i $\underline{A}^T$ - odgovarajuća matrica koeficijenata. Sada će sistem normalnih jednadžbi u matričnom obliku s ovdje usvojenim simbolima i $\underline{k}$ kao vektor korelata glasiti:

$$\begin{aligned} \bar{\underline{C}}\,\underline{k} + \underline{A}\,\underline{x} - \underline{l} &= \underline{0} \\ \underline{A}\,\underline{k} &= \underline{0} \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.-4$$

očito je da i dalje vrijedi već ranije navedena jednadžba:

$$\bar{\underline{C}} = \underline{C}_{nn} + \underline{C}_{ss} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.-5$$

a matrice $\underline{C}_{nn}$ (za "šum" ili pogreške mjerenja) i $\underline{C}_{ss}$ (za "signal") unaprijed trebaju biti zadane, odnosno odredjene iz empiričkih podataka.

Rješenje za slučaj "jednostavne" kolokacije glasi:

$$\underline{x} = (\underline{A}^T \cdot \bar{\underline{C}}^{-1} \underline{A})^{-1} \cdot \underline{A}^T \cdot \bar{\underline{C}}^{-1} \underline{l} \qquad \underline{k} = \bar{\underline{C}}^{-1} \cdot (\underline{l} - \underline{A}\,\underline{x}) \ldots\ldots\ 3.-6$$

zbog čega proizilazi za "unutarnji" signal $\underline{s}$ relacija:

$$\underline{s} = \underline{C}_{ss}\underline{k} = \underline{C}_{ss}\bar{\underline{C}}^{-1}(\underline{l} - \underline{A}\,\underline{x}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3.-7$$

Pošto se kod "predikcije" odredjuje samo "vanjski" signal $\underline{s}^P$, onda će tražena vrijednost $\underline{1}^P$ x) za promatrani primjer biti:

$$\underline{1}^P = \underline{A}^P \underline{x} + \underline{s}^P \qquad \text{.................... 3. - 8}$$

pa se konačno dobiva:

$$\underline{s}^P = \underline{C}^P_{ss} \cdot \underline{\bar{C}}^{-1}_{ss} \cdot \underline{s} \qquad \text{.................. 3. - 9}$$

To je izraz koji će se ovdje upotrijebiti za dalja izračunavanja.

4. Iznalaženje numeričkih vrijednosti za C (d) se poduzima prema formuli 3. - 2, pa se za numeričke podatke u tabeli 1. - b dobije:

$$C(d_{12}) = 100 \cdot \frac{0{,}01}{1+\left(\frac{212}{200}\right)^2} = +0{,}471 \qquad C(d_{13}) = 100 \cdot \frac{0{,}01}{1+\left(\frac{594}{200}\right)^2} = +0{,}102$$

$C(d_{14})$ =+0,353, $C(d_{23})$ =+0,207, $C(d_{24})$ = + 0,426

$C(d_{23})$ = +0,207 $C(d_{24})$= + 0,426, $C(d_{34})$ = + 0,146,

$C(d_{p1})$ = + 0,469, $C(d_{p2})$= + 0,859, $C(d_{p3})$ = + 0,213,

$C(d_{p4})$ = + 0,523 ...................... 3.-10

Matrica $\underline{C}_{ss}$, $\underline{\bar{C}}$ i $\underline{C}^P_{ss}$ s tim numeričkim vrijednostima u ovom primjeru biće:

- matrica varijance - kovarijance $\underline{C}_{ss}$ signala:

$$\underline{C}_{ss} = \begin{bmatrix} +1, & +0{,}471, & +0{,}102, & +0{,}353 \\ .., & +1, & +0{,}207, & +0{,}426 \\ & .., & 1, & +0{,}146 \\ & & .., & +1 \end{bmatrix} \qquad \text{......... 3. - 11}$$

x) U matrici kovarijanca $C^P$, u signalu $s^P$ i $1^P$, indeks P označava da se odnosi na neku parcelu P, te nema nikakve veze sa oznakama u matričnom računu.

- matrica varijance - kovarijance vektora opažanja $\underline{\bar{C}}$:

$$\underline{\bar{C}}=\underline{C}_{nn}+\underline{C}_{ss} = \begin{bmatrix} +1{,}090, & +0{,}471, & +0{,}102, & +0{,}353 \\ .., & +1{,}090, & +0{,}207, & +0{,}426 \\ & .., & +1{,}090, & +0{,}146 \\ & & .., & +1{,}090 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ 3.-12$$

- matrica (vektor) varijance - kovarijance izmedju signala jedne nove "tačke" P i četiri poznate "tačke" $P_i$ glasi:

$$\underline{C}^P_{ss} = \left[+0{,}469,\ +0{,}859,\ +0{,}213,\ +0{,}523\right] \quad \ldots\ 3.-13$$

Ovdje se riječju "tačka" podrazumijevaju odabrane centroidne tačke parcela kao reprezentantni njihovih medjusobnih položaja.

5. Linearna funkcija trenda odredjuje se iz položajnih koordinata tačaka $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, tj. produkt $\underline{A} \cdot \underline{x}$ u linearnoj aproksimaciji bit će zadan jednadžbom:

$$\text{trend}\ (uP) = \left[a_o + a_1\, x_p + a_2\, y_p\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ 3.-14\text{-a}$$

Matrični oblik za nepoznanice koje definiraju trend jest vektor:

$$\underline{x}^T = \left[a_k,\ a_1,\ a_2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ 3.-14\text{-b}$$

a matrica koeficijenata očito je jednaka:

$$\underline{A} = \left[1,\ x_i,\ y_i\right]\ ,\ i = 1,2,3,4, \quad \ldots\ldots\ldots\ 3.-15$$

Numeričke vrijednosti za $x_i$ i $y_i$ u matrici A uzimaju se iz tabele 1.-a, tim što su vrijednosti podijeljene sa 100, jer je matrica $\underline{C}_{ss}$ ranije bila uvećana za 100 puta zbog jednostavnijeg računanja koeficijenata:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} +1, & +1{,}8, & +1{,}65 \\ +1, & -0{,}2, & +0{,}95 \\ +1, & -3{,}2, & -1{,}55 \\ +1, & +1{,}6, & -1{,}05 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ 3.-16$$

Matrica (vektor) koeficijenata $\underline{A}^P$ za zadanu tačku P, kao reprezentanove promatrane "ciljne" parcele, iznosi konačno:

$$\underline{A}^P = \left[+1, \ +0{,}20, \ +0{,}25\right] \quad \ldots\ldots \quad 3.-17$$

6. Kad se odrede sve potrebne matrice, odnosno vektori, tj. sve od nule različite elemente matrice $\underline{B}$ u izrazu /3.-5/ , može se pristupiti rješavanju sistema normalnih jednadžbi. Osim Choleskyjevog postupka može se upotrijebiti geodetima dobro poznat Gaussov algoritam. Ovdje je odabrana ta poznata metoda, a primijenjena na način kako je to za slučaj "linearne predikcije" anomalija sile teže lijepo prikazano /Wolf, 1979.)

Za predmetnu svrhu odredjena polazna šema izračunatih koeficijenata svih matrica reproducirana je u tabeli 2:

Tabela 2.

| 1. GRUPA | | | | | | | | 2. GRUPA | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_4$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $t$ | $l^P$ | |
| +1.090 | +0.471 | +0.102 | +0.353 | +1 | +1.8 | +1.65 | +0.07 | +0.469 | $C^T_{sps}$ |
| | +1.090 | +0.207 | +0.426 | +1 | -0.2 | +0.95 | -0.11 | +0.859 | $C^T_{sps}$ |
| | | +1.090 | +0.146 | +1 | -3.2 | -1.55 | -0.30 | +0.213 | $C^T_{sps}$ |
| | | | +1.090 | +1 | +1.6 | -1.05 | +0.10 | +0.523 | $C^T_{sps}$ |
| | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | +1 | $A^T_P$ |
| | | | | | 0 | 0 | 0 | +0.20 | $A^T_P$ |
| | | | | | | 0 | 0 | +0.25 | $A^T_P$ |
| | | | | | | | 0 | 0 | |
| $C = C_{ss} + C_{nn}$ | | | | A | | | | | |

Rješenjem normalnih jednačina dobija se $l^P = 0{,}05$, a s njim i rješenje za traženi koeficijent relativne vrijednosti u ciljnoj parceli označenoj sa P, koji iznosi:

$$V_P^P = V_0^P + l^P = 0{,}25 + 0{,}06 = 0{,}31$$

Očito, ovdje je $V_O^P$ početno uzeta približno procijenjena relativna vrijednost koeficijenta od + 0,25 za promatranu parcelu, a $l^P$ iznos njene popravke od +. 0,056, zaokruženo na dvije decimale, tj. na + 0,06, dobiveno rješenjem sustava normalnih jednadžbi u tabeli 3.

Dobiveni iznos od 0,31 za traženi $V_P^P$ "ciljne" parcele je tačniji nego da se odredjivao nekim jednostavnijim interpolacijskim postupkom. Što više, postupak "predikcije", kao jednostavniji oblik "metode kolokacije po najmanjim kvadratima", omogućava i odredjivanje srednje pogreške predicirane veličine, ali je ovdje ipak najvažnije da je postignut objektivan postupak odredjivanja koeficijenta relativne vrijednosti. To je i bio, zapravo, zadatak prednjeg prikaza.

Naravno, može se odabrati i složeniji sintetički model nego što je uzet u ovom primjeru, te se tako možemo sasvim približiti općenito kompleksnijim odnosima u postojećoj stvarnosti. Za realne slučajeve trebaju se tek otvoriti mogućnosti primjene suvremene metode kolokacije, odnosno njenog postupka "predikcije" (sa ili bez filtriranja).

## 4. ZAKLJUČAK

Iz ovih sažetih prikaza može se izvući općeniti zaključak da primjena metode optimiranja i postupka "predikcije" nije stvar daleke budućnosti, kao što se može na prvi pogled pomisliti. Naime, za širu upotrebu ovih metoda prvo treba niz ispitivanja u stvarnim uslovima komasacije zemljišta i onda dati jednu kritičku ocjenu ekonomičnosti ovih metoda u odnosu na rezultate koje one očito ostvaruju. Uvodjenjem ovih metoda u praksu napravio bi se značajan korak od jedne sadašnje stereotipne tehnike ka egzaktnom pristupku u odredjivanju optimalnog plana nadiobe i u odredjivanju relativne vrijednosti parcela u komasacijskoj gromadi. Ako se zna da se cjeli postupak rješenja dade automatizirati upotrebom kompjutora s odgovarajućim paketom programa, onda prednosti ovakvog načina rada ne treba posebno ni isticati, jer su očite.

## LITERATURA


1. Hupfeld W., 1971. : Ein Beispiel zur mathematichen Planung-Srechnung ZFV, str. 61-65, Stutgart, 1971.
2. Wolf H., 1979. : Kollokation und Pradiktion als ein Grupperausgleichung, Ausgleichungs-rechnung II, str.299-305, Bonn, 1979.
3. Ivković Đ., 1981. : Magistarski rad, Zagreb, 1981.
4. Čolič K., 1978. : Teoretska osnova metode kolokacije, predavanja u podružnici GIG-a Sarajevo, 1978.