- Muminagić ing. Abdulah, V.Jovanović dip.ing. Račun izravnanja, Vojnogeografski institut, Beograd 1965. godine;
- Ing. Branko Borčić, Matematička kartografija (kartografske projekcije), Zagreb 1955. godine;
- Rostislav J.Tjabin, Opšta i praktična kartografija, Savezna geodetska uprava, Beograd 1949. godina.

PRIMIJENJENA GEODEZIJA:

- Ing. Alojz Podpečan, Primijenjena geodezija za geodetske srednje tehničke škole, 1950. godine;
- Prof. Mato Janković, Inženjerska geodezija I dio, 1957. godine;
- Prof. Mato Janković Inženjerska geodezija II dio, 1969. godina;
- Prof.ing. Čedomir Cvetković, Primijenjena geodezija I dio;
- Prof.ing. Čedomir Cvetković, Primijenjena geodezija II dio.

Tadić ing. Fabijan

JEDAN SLUČAJ VEZE ZA VISOKU NEPRISTUPNU TAČKU

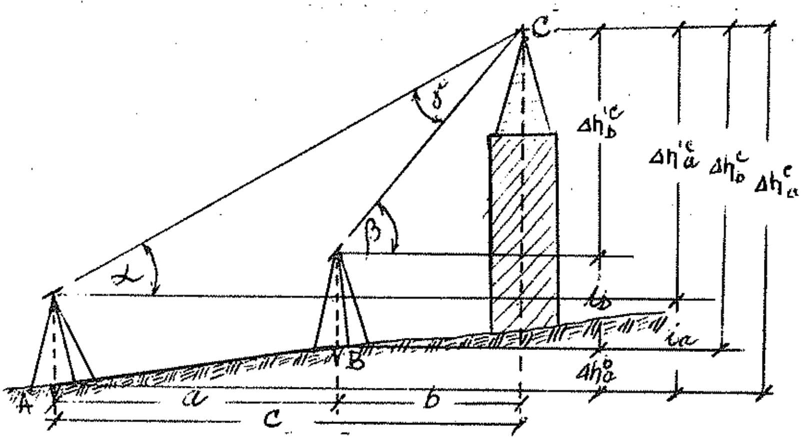
ili - računsko odredjivanje dužine pomoću vertikalnih uglova i osnovice u pravcu tražene dužine.

U geodetskoj praksi često puta dolazimo u situaciju da priključak poligonog vlaka na neku visoku - nepristupnu trigonometrijsku ili neku drugu tačku nismo u mogućnosti da ostvarimo na uobičajeni način. Nismo, naime, u mogućnosti da u izvjesnim terenskim prilikama razvijemo onaj uobičajeni jedan ili dva trokuta, pomoću kojih treba da odredimo dužinu završne ili početne poligone strane i veličinu završnog ili početnog veznog ugla.

Ovakvi slučajevi pojavljuju se najčešće u gusto naseljenim gradskim terenima, a naročito terenima starih gradskih naselja, poznatim po svojim uskim i zatvorenim ulicama. Sličan slučaj može se pojaviti i kod poligonih vlakova kroz usječene terene, kao što su kanjoni rijeka, potoka, provalija i slično. Uski prostor ulice ili terena kroz koji prolazi poligoni vlak naprosto ne dozvoljava da se za priključak primjeni poznati - klasični način.

Osnovu za rješenje ovog zadatka ovim načinom čini vertikalno postavljen pomoćni trokut, sa izmjerenom osnovicom u pravcu visoke tačke i izmjerenim vertikalnim uglovima sa krajnjih tačaka osnovice prema visokoj tački.

Sam postupak i rješenje ovog zadatka sastoji se u slijedećem:



Sl. 1.

Iz slike (1) vidi se da je:

$$\Delta h_a^c = \Delta h_a'^c + i_a = \Delta h_b'^c + i_b + \Delta h_a^b \qquad (1)$$

gdje je:

$$\Delta h_a'^c = c \cdot tg\alpha$$

i

$\Delta h_b'^c = b \cdot tg\beta$, pa možemo staviti da je:

$$c \cdot tg\alpha + i_a = b \cdot tg\beta + i_b + \Delta h_a^b \qquad (2)$$

Ako usvojimo da je, prema sl. (1), veličina "a" mjerena dužina (osnovica) i kao takva poznata, možemo staviti, zavisno od toga koju dužinu odredjujemo, da je:

$c = a + b$ ili

$b = c - a$

pa ako, zatim, u jednačini (2) mjesto veličine "c" stavimo veličinu (a + b), dobićemo da je:

$$(a + b) \cdot tg\alpha + i_a = b \cdot tg\beta + i_b + \Delta h_a^b$$

ili $$a \cdot tg\alpha + b \cdot tg\alpha + i_a = b \cdot tg\beta + i_b + \Delta h_a^b$$

odnosno: $$b \cdot (tg\beta - tg\alpha) = a \cdot tg\alpha + i_a - i_b - \Delta h_a^b$$

a odavde biće:

$$b = \frac{a \cdot tg\alpha + (i_a - i_b - \Delta h_a^b)}{tg\beta - tg\alpha} \qquad (3)$$

Izraz $(i_a - i_b - \Delta h_a^b)$ u jednačini (3) možemo posebnim postupkom odrediti kao jedinstvenu veličinu, pa ako toj veličini damo proizvoljnu oznaku, tj. da je npr.

$$(i_a - i_b - \Delta h_a^b) = W \qquad (4)$$

dobićemo da je:

$$\boxed{b = \frac{a \cdot tg\alpha + W}{tg\beta - tg\alpha}} \qquad (5)$$

Na isti način dobićemo i jednačinu za dužinu "c", tj. ako u jednačini (2) mjesto veličine "b" uvrstimo njoj odgovarajuću veličinu (c - a), dobićemo da je:

$$\boxed{c = \frac{a \cdot tg\beta + W}{tg\beta - tg\alpha}} \qquad (6)$$

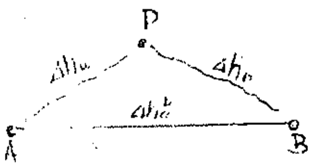
Radi kontrole računanja potrebno je sračunati obadvije dužine, jer prema slici (1) mora biti:

$$c - b = a \qquad (7)$$

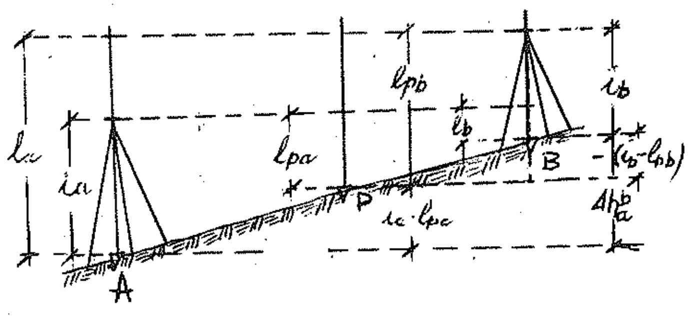
Kao što se vidi, za rješenje ovog zadatka potrebno je na pravcu prema visokoj tački odabrati pogodno mjesto i izmjeriti osnovicu AB = a, (sl. 1), a zatim sa njenih krajnjih tačaka A i B izmjeriti vertikalne kutove α i β prema tački "C", te veličinu $W = (i_a - i_b - \Delta h_a^b)$. Pri odabiranju krajnjih tačaka osnovice AB treba voditi računa, da se sa jedne od njih, ili pak sa neke tačke na pravcu izmedju njih, vidi neka udaljena trigonometrijska tačka, radi odredjivanja veznog ugla poligonog vlaka.

Tačnost ovako odredjenih veličina "b" i "c" ovisiće, uglavnom, od tačnosti direktno mjerenih veličina, tj. od tačnosti osnovice "a", vertikalnih uglova α i β, te veličine "W". Ova tačnost ovisiće još i od veličine razlike uglova α i β, odnosno, od veličine kuta γ u tački "C", jer je, prema sl.1, $\beta - \alpha = \gamma$. Što je ova razlika veća, to će greška direktno mjerenih veličina manje uticati na tačnost računskih veličina "b" i "c". Stoga je mjerene veličine potrebno odrediti sa što je moguće većom tačnošću (veličine a i W do na milimetar, a kut α i β mjeriti u 3 girusa sa tri konca), a kod izbora položaja tačaka A i B nastojati da tačka B bude što bliže, a tačka A što dalje od visoke tačke, odnosno, da je osnovica "a" što duža.

Veličinu $W = (i_a - i_b - \Delta h_a^b)$ odredićemo milimetarskom tačnošću posebnim postupkom geometrijskog nivelmana, na slijedeći način: Na prostoru oko sredine izmedju tačaka A i B (može i na pravcu A-B) odabraćemo jednu čvrstu visinsku tačku (slika 2, tačka P), špicast kamen ili slično, kao što to praktikujemo pri odabiranju veznih tačaka kod geometrijskog nivelmana. Nakon što smo sa tačke A izmjerili vertikalni kut α dovešćemo durbin u horizontalan položaj (čitanje na vertikalnom limbu 90 stepeni) i na vertikalno postavljenim letvama u tačkama P i B pročitati odsječke "l_{pa}"i"l_b" (sl. 3). Premjestićemo, zatim, teodolit na tačku B i poslije mjerenja vertikalnog kuta β, na isti način pročitaćemo odsječke "l_a" i "l_{pb}" na letvama postavljenim u tačkama A i P. Da bismo dobili što tačnije ove odsječke, čitanje ćemo obaviti u dva položaja durbina do na milimetar tačno i uzeti aritmetičku sredinu. Veličinu "W" dobićemo pomoću ovih odsječaka, a prema slici 3, iz koje slijedi da je:



Sl. 2.



Sl. 3.

$$\Delta h_a^b = (i_a - l_{pa}) + [-(i_b - l_{pb})]$$

odnosno:

$$\Delta h_a^b = (i_a - i_b) - (l_{pa} - l_{pb})$$

a zatim:

$$(i_a - i_b - \Delta h_a^b) = (l_{pa} - l_{pb})$$

ili

$$\boxed{W = l_{pa} - l_{pb}} \qquad (8)$$

Medjutim, pošto nam je u ovom zadatku potrebna i sama veličina visinske razlike Δh_a^b, radi redukcije dužine osnovice AB na horizont, njenu veličinu ćemo dobiti na uobičajeni način iz čitanja geometrijskih odsječaka l_{pa} i l_b sa tačke A i l_a i l_{pb} sa tačke B, a prema slici (3) iz koje slijedi da je:

$$\Delta h_a^b = \Delta h_a + \Delta h_b$$

gdje je:

$\Delta h_a = l_a - l_{pb}$ (čitanje sa tačke B)

$\Delta h_b = l_{pa} - l_b$ (čitanje sa tačke A)

odnosno:

$$\Delta h_a + \Delta h_b = (l_a - l_b) + (l_{pa} - l_{pb})$$

ili:

$$\boxed{\Delta h_a^b = (l_a - l_b) + (l_{pa} - l_{pb})} \qquad (9)$$

Trebamo li, pak, i pojedinačne visine instrumenta, njih ćemo dobiti prema slici (3), gdje je:

$$\boxed{\begin{aligned} i_a &= l_b + \Delta h_a^b \\ i_b &= l_a - \Delta h_a^b \end{aligned}} \qquad (10)$$

A zatim, ako trebamo i visinu tačke "C", biće prema sl. (1):

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta h_a^c &= c \cdot tg\alpha + i_a \\ \Delta h_b^c &= b \cdot tg\beta + i_b \end{aligned}} \qquad (11)$$

Oznake u formulama (8), (9), i (10) predstavljaju:

l_a = čitanje letve na tački A sa tačke B

l_b = čitanje letve na tački B sa tačke A

l_{pa} = " " " " P " " A

l_{pb} = " " " " P " " B

Kao što se vidi, na ravnim i blago nagnutim terenima, a takvi su upravo najčešći tereni gradova i naselja, sve potrebne veličine dobićemo neposrednim čitanjem sa stajališnih tačaka A i B.

Medjutim, ako je teren takav da visinska razlika izmedju krajnjih tačaka osnovice $\overline{AB}$ iznosi više od 1,5 m., tada ćemo morati odrediti visinsku razliku Δh_a^b izmedju tačaka A i B nivelanjem preko veznih tačaka. Pri tome, a da bi dobili tačne visine instrumenata i_a i i_b, očitaćemo sa stajališnih tačaka A i B, horizontalnom vizurom teodolita, odsječke na letvama postavljenim na prvoj i posljednjoj veznoj tački (tačke M i N, sl. 4). Ove tačke treba odabrati i čitanje sa teodolitom izvršiti odmah nakon očitanja vertikalnih uglova, a tek tada pristupiti nivelanju veznih tačaka. Nivelanje se može obaviti sa dovoljnom tačnošću i sa horizontalnom vizurom teodolita (eventualno u dva položaja durbina - radi kontrole). Nakon obavljenog nivelanja odredićemo visinsku razliku Δh_a^b na poznati način, a zatim i visine] instrumenata, za koje, prema slici 4, slijedi da je:

$$\boxed{\begin{aligned} i_a &= l_{am} + \Delta h_{am} \\ i_b &= l_{bn} + \Delta h_{bn} \end{aligned}}$$

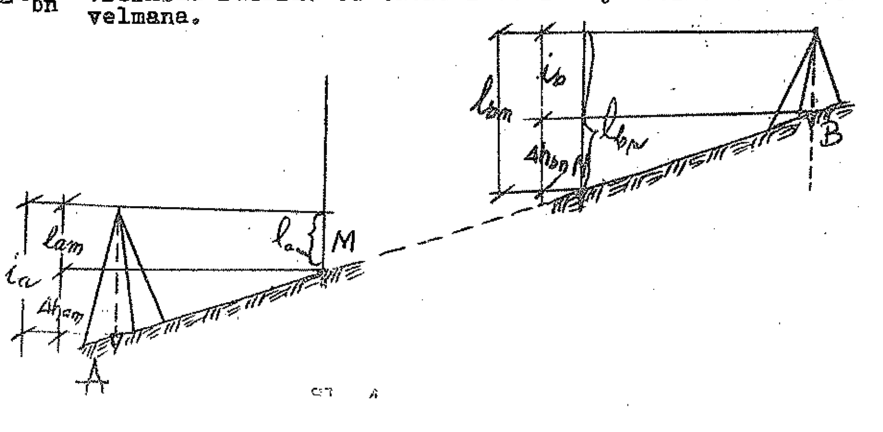
gdje su:

l_{am} = očitanje letve na tački M, teodolitom sa tačke A

l_{bn} = " " " " N, " " " B

Δh_{am} = visinska razlika od tačke A do prve vezne tačke nivelmana

Δh_{bn} = visinska razlika od tačke B do zadnje vezne tačke nivelmana.



Srednja greška odredjenih dužina "b" i "c"

Iz teorije o greškama znamo, da je kvadrat srednje greške neke računski odredjene veličine jedank zbiru kvadrata njenih derivacija po promjenljivim (mjerenim) veličinama iz kojih je ona odredjena.

Prema tome, za naš prvi slučaj - dužina "b", koja je odredjena jednačinom:

$$b = \frac{a . tg\,\alpha + W}{tg\beta - tg\alpha}$$

biće:

$$M_b^2 = \left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial W}\right)^2$$

gdje je:

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{a . 1/\cos^2\alpha \;.\; (tg\beta - tg\alpha) + (a . tg\alpha + W) . 1/\cos^2\alpha}{(tg\beta - tg\alpha)^2} \;.\; d\alpha$$

ili

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{a . tg\beta - a . tg\alpha + a . tg\alpha + W}{(tg\beta - tg\alpha)^2} \;.\; \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

odnosno:

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{a . tg\beta + W}{(tg\beta - tg\alpha)^2} \;.\; \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a . tg\beta + W}{tg\beta - tg\alpha} \;.\; \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \;.\; \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

pa kako je:

$$\frac{a . tg\beta + W}{tg\beta - tg\alpha} = c$$

biće:

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} = c \;.\; \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \;.\; \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Na isti način dobićemo da je i :

$$\frac{\partial b}{\partial \beta} = - b \;.\; \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \;.\; \frac{d\beta}{\cos^2\beta}$$

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \;.\; d_a \;.\; tg\alpha$$

$$\frac{\partial b}{\partial W} = \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \cdot d_w$$

pa će srednja greška dužine "b" biti:

$$M_b = \pm \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{\rho \cos^2\alpha}\right)^2 + b^2 \cdot \left(\frac{d\beta}{\rho \cos^2\beta}\right)^2 + (d_a \cdot tg\alpha)^2 + (d_w)^2} \quad (12)$$

Istim postupkom dobili bi i srednju grešku dužine "c":

$$M_c = \pm \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{\rho \cdot \cos^2\alpha}\right)^2 + b^2 \cdot \left(\frac{d\beta}{\rho \cdot \cos^2\beta}\right)^2 + (d_a \cdot tg\beta)^2 + (d_w)^2} \quad (13)$$

Praktični primjer - sa terena

Terenski podaci:

$a = 43,697$ m
$\alpha = 15^0 55' 20''$
$\beta = 33^0 47' 28''$
$l_a = 0,903$ m
$l_b = 2,087$ m
$l_{pa} = 1,927$ m
$l_{pb} = 1,330$ m
$d\alpha = \pm 0,45''$
$d\beta = \pm 0,93''$
$d_a = \pm 2,0$ mm
$d_w = \pm 2,0$ mm

$W = l_{pa} - l_{pb}$
$W = + 0,597$m

$\Delta h_a^b = (l_a - l_b) - (l_{pa} - l_{pb})$
$\Delta h_a^b = - 0,587$ m

Podaci iz tablica:

$tg\alpha = 0,28528$ $\cos\alpha = 0,962$ $\cos^2\alpha = 0,93$
$tg\beta = 0,66922$ $\cos\beta = 0,831$ $\cos^2\beta = 0,69$

$tg\beta - tg\alpha = 0,38394$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1,07$

$\frac{1}{tg\alpha - tg\beta} = 2,6$ $\frac{1}{\cos^2\beta} = 1,45$

Račun dužine b i c :

$$b = \frac{a \cdot tg\alpha + W}{tg\beta - tg\alpha} = \frac{12,4647 + 0,597}{0,38394}$$

$b = 34,021$ m (mjereno na terenu: 34,025)

$$c = \frac{a \cdot tg\beta + W}{tg\beta - tg\alpha} = \frac{29,2409 + 0,597}{0,38394}$$

$c = 77,715$ m

Kontrola:

$c = a + b =$ 43,693
+ 34,021
77,714

$i_a = i_b + \Delta h_a^b$

$i_a = 1{,}500$ m

$i_b = i_a - \Delta h_a^b$

$i_b = 1{,}490$ m.

$r_a = 0{,}004$ m

red. a = 43,693 m

Račun srednje greške - u milimetrima:

$$M_b = \pm \frac{1}{tg\beta - tg\alpha} \cdot \sqrt{\left(\frac{c \cdot d\alpha}{\rho}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b \cdot d\beta}{\rho}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right)^2 + (d_a \cdot tg\alpha)^2 + (d_w)^2}$$

$$M_b = \pm 2{,}6 \cdot \sqrt{0{,}17^2 \cdot 1{,}07^2 + 0{,}15^2 \cdot 1{,}45^2 + 0{,}56^2 + 2{,}0^2}$$

$$M_b = \pm 2{,}6 \cdot \sqrt{0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}31 + 4{,}00}$$

$$M_b = \pm 2{,}6 \cdot \sqrt{4{,}39} = \pm 2{,}6 \cdot 2{,}1$$

$M_b = \pm 5{,}5$ mm.

Račun visine tačke C:

$\Delta h_a^c = c \cdot tg\alpha + i_a = 22{,}171 + 1{,}500 = 23{,}671$ m

$\Delta h_b^c = b \cdot tg\beta + i_b = 22{,}768 + 1{,}490 = 24{,}258$ m

Kontrola:

$\Delta h_a^c - \Delta h_b^c = \Delta h_a^b = \qquad = -0{,}587$ m